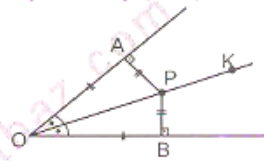


AÇIORTAY-5

AÇIORTAY

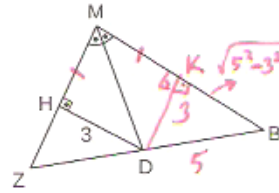
Bir açının ölçüsünü eş iki parçaya ayıran ışına açıortay denir.
Şekilde [OK], AOB'nin açıortayıdır.

Açıortay üzerinde alınan noktanın açının kollarına uzaklığı eşittir.
 $PE \perp OK$, $|AP| = |PB|$ ve $|OB| = |AO|$



Örnek...1 :

MBZ bir üçgendir. [MD], M açısının açıortayı, $|HD|=3$ br, $|DB|=5$ br olduğuna göre $|MB|-|MH|$ kaç birimdir?



$$|MD| = |MH| + 4$$

$$(|MB| - |MH|) = 4$$

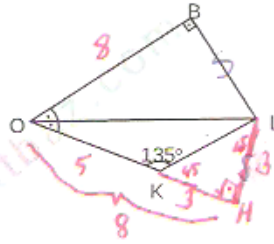
Örnek...2 :

OBL dik üçgen $|OB|=8$ br, $|OK|=5$ br ise $|KL|$ kaç birimdir?

$$[LH] \perp [OH]$$

$$|KL| = 3\sqrt{2}$$

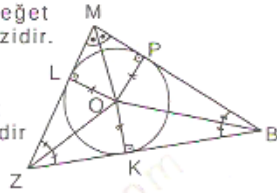
$$(45-45-90)$$



ÜÇGENDE AÇIORTAY ÖZELLİKLERİ

1. Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

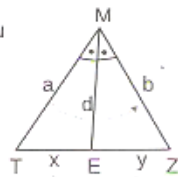
Şekilde O iç teğet çemberin merkezidir



2. iç açıortay teoremi
MTZ bir üçgen ve [ME] bu üçgenin açıortayı ise

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$d = \sqrt{a \cdot b - x \cdot y}$$



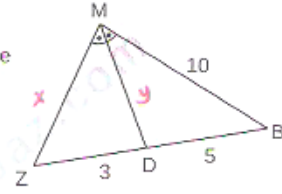
Örnek...3 :

MBZ bir üçgendir. $|ZD|=3$ br, $|BD|=5$ br, ise $|MD|$ kaç birimdir?

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$y = \sqrt{10 \cdot 5 - 3 \cdot 3} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



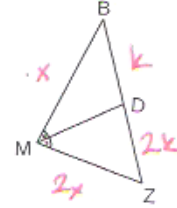
Örnek...4 :

MBZ bir üçgendir. $|BZ|=3|BD|$, $\angle MBZ=60$ br ise $|MZ|+|ZD|$ kaç birimdir?

$$\frac{|BM|}{|MZ|} = \frac{k}{2k}$$

$$\Rightarrow 3x + 3k = 60 \Rightarrow x + k = 20$$

$$|MZ| + |ZD| = 2k + 2x = 40$$



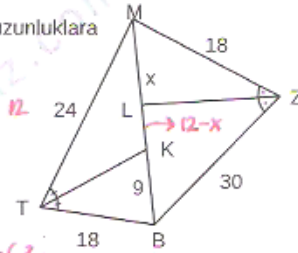
Örnek...5 :

MTBZ bir dörtgen, [TK] ve [ZL] açıortaylardır. Şekilde verilen uzunluklara göre $|ML|$ kaç birimdir?

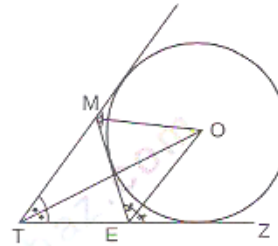
$$\frac{18}{24} = \frac{9}{|KM|} \Rightarrow |KM| = 12$$

$$|LK| = (2-x)$$

$$\frac{18}{30} = \frac{x}{21-x} \Rightarrow x = \frac{63}{8}$$



3. Üçgende iki dış açıortay ve diğer iç açının açıortayı bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir.

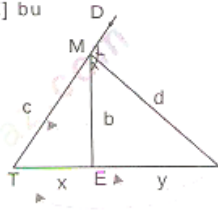


AÇIORTAY-5

4. Dış açıortay teoremi
MTZ bir üçgen ve [ME] bu üçgenin açıortayı ise

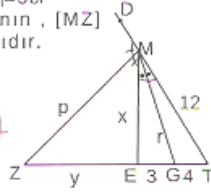
$$\frac{b}{c} = \frac{y}{y+x}$$

$$d = \sqrt{y(y+x)} - b \cdot c$$



Örnek...6 :

MTZ üçgenidir. |TG|=4br, |EG|=3br
|MT|=12br |MG|, |MTE| açısının, |MZ|
|EMD| açısının açıortaylarıdır.
Buna göre p kaçtır?



$$\frac{x}{12} = \frac{3}{4} \text{ (dış açıortay)}$$

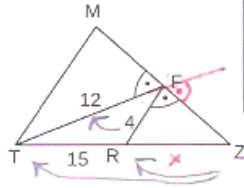
$$x = 9$$

$$\frac{3}{y+3} = \frac{9}{12} \rightarrow y = 21 \text{ (dış açıortay)}$$

$$p = \sqrt{21 \cdot 28} - 9 \cdot 12 = \sqrt{480} = 4\sqrt{30}$$

Örnek...7 :

MTZ bir üçgenidir.
m(TFZ)=m(RFZ)
Şekilde |TF|=12br,
|TR|=15br |RF|=4br ise
|RZ| kaç birimdir ?



[FZ] dış açıortay

$$\frac{x}{x+15} = \frac{4}{12+3}$$

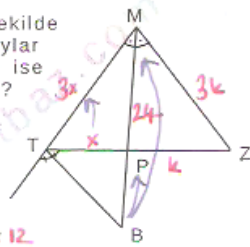
$$3x = x+15$$

$$2x = 15$$

$$x = 7.5$$

Örnek...8 :

MTZ bir üçgenidir. Şekilde
[MB] ve [TB] açıortaylar
|MZ|=3, |ZP|, |PM|=24br ise
|MB| kaç birimdir ?



isimleri koreni

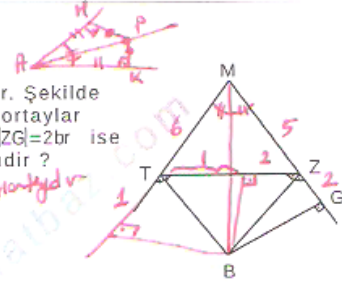
$$\frac{3k}{17k} = \frac{k}{17k} \rightarrow |TM|=3$$

$$\frac{PB}{PB+24} = \frac{x}{17x} \Rightarrow |PB|=12$$

(dış açıortay koreni) |MB|=36

Örnek...9 :

MTZ bir üçgenidir. Şekilde
[MB] ve [ZB] açıortaylar
|MT|=|MZ|+1=6br, |ZG|=2br ise
|ZT| kaç birimdir ?

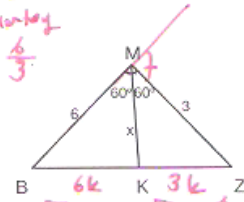


[MB] dış açıortay
[ZB] dış açıortay

$$|ZT|=3$$

Örnek...10 :

MBZ bir üçgen
m(BMK)=m(KMZ)=60°
2. |MZ|=|MB|=6br ise |MK|=x
kaç birimdir ?

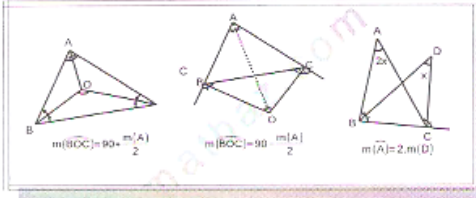


[MK] dış açıortay

$$\frac{3k}{3k} = \frac{x}{6}$$

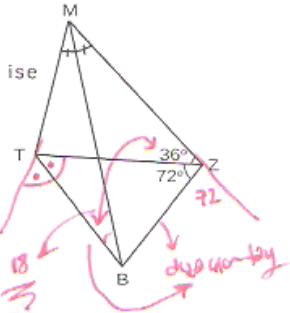
$$x = 2$$

HATIRLATMA



Örnek...11 :

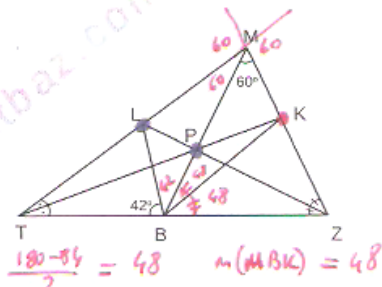
Şekilde MTBZ dörtgen, [MB]
açıortay, 2m(MZT)=m(TZB)=72° ise
m(MBT) kaç derecedir ?



[TB] dış açıortaydır.
[ZB] dış açıortaydır.

Örnek...12 :

MTB üçgen, [TK],
[LZ] açıortaylardır.
[TK]n[MB]n[LZ]=[P]
m(BMZ)=60°
m(LBT)=42° ise
m(MBK) kaç
derecedir ?

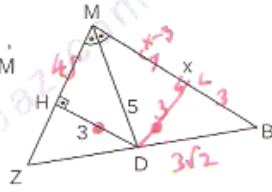


P MTE de iç açıortayların kesişim noktası
K MTB de dış açıortayların kesişim noktası 214
L MBZ de dış açıortayların kesişim noktası
(2 dış ve diğer köşerin iç açıortay kesişimi)



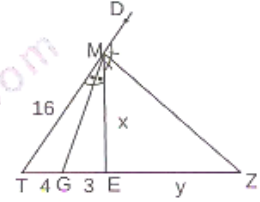
DEĞERLENDİRME - 1

- 1) MBZ bir üçgendir.
 $|HD|=3\text{br}$, $|MD|=5\text{br}$,
 $|DB|=3\sqrt{2}\text{br}$, $[MD]$, M
açısının açıortayı
olduğuna göre
 $|MB|=x$ kaçtır?



$x-3=4 \rightarrow x=7$

- 4) MTZ üçgendir.
 $|TG|=4\text{br}$, $|EG|=3\text{br}$,
 $|MT|=16\text{br}$, $[MG]$, \widehat{MTE}
nın, $[MZ]$, \widehat{EMD} nin
açıortayıdır.
Buna göre $x+y$ kaçtır?

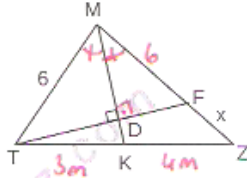


$\frac{x}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow x=12$ ($[MG]$ açıortayı)

$\frac{y}{y+7} = \frac{x}{16} = \frac{12}{16} \Rightarrow y=21$ ($[MEZ]$ açıortayı)

$x+y=12+21=33$

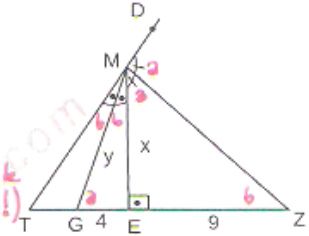
- 2) MTZ bir üçgen
 $[TF] \perp [MK]$ dir.
 $\frac{|TK|}{|KZ|} = \frac{3}{4}$
 $m(\widehat{KMZ}) = m(\widehat{TMK})$
 $|MT|=6\text{br}$, $|FZ|=x$
kaç birimdir?



$\triangle TFK \sim \triangle MZK$ dir. ($[MK]$ açıortayı, yükseklik)

$\frac{6}{6+x} = \frac{3}{4} \rightarrow 8=x+6 \rightarrow x=2$

- 5) MTZ üçgendir.
 $|EG|=4\text{br}$, $|EZ|=9\text{br}$,
 $[MG]$, \widehat{MTE} nin, $[MZ]$,
 \widehat{EMD} nin açıortayıdır.
Buna göre x,y kaçtır?



$\triangle GEM \sim \triangle MEZ$
 $\frac{9}{x} = \frac{x}{4}$ (öklid teoremi)
 $x=6$

$y^2 = 4^2 + x^2 = 16 + 36$
 $y = \sqrt{52}$
 $y = 2\sqrt{13}$

- 3) MTZ bir üçgen ve R içteğet
çemberin merkezidir.
 $|TM|=16\text{cm}$, $|TZ|=24\text{cm}$
ve $4|TF|=5|TR|$
olduğuna göre $\angle(ABC)$
kaç cm dir?



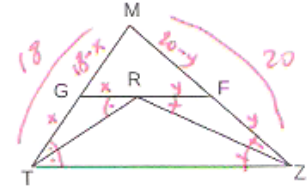
$[TF]$, $[RZ]$ açıortayıdır.

$\frac{|MF|}{|FZ|} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

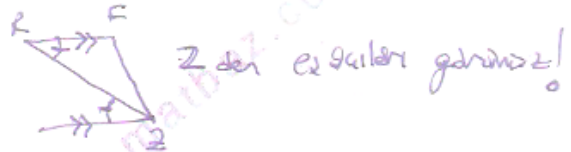
$\frac{4k}{k} = \frac{24}{m} \Rightarrow m=6$

$\angle(ATZ) = 3m+40 = 18+40 = 58$

- 6) MTZ bir üçgen ve R
içteğet çemberin
merkezidir. $[TZ] \parallel [GF]$,
 $|MT|=18\text{br}$, $|ZM|=20\text{br}$
ise MGF üçgeninin
çevresi kaç birimdir?

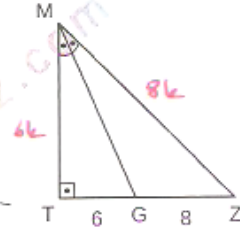


$\angle(RGF) = 18+20 = 38$



DEĞERLENDİRME - 2

- 1) MTZ bir dik üçgendir.
 $m(\widehat{TMG}) = m(\widehat{GMZ})$,
 $|TG| = 6\text{br}$, $|GZ| = 8\text{br}$
 olduğuna göre $|MG|$
 kaç birimdir?

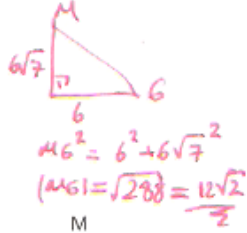


$$(8k)^2 = (6k)^2 + 14^2$$

$$2k \cdot 14k = 14 \cdot 14$$

$$2k^2 = 14$$

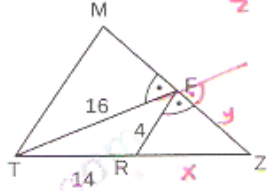
$$k = \sqrt{7}$$



$$MG^2 = 6^2 + 6\sqrt{7}^2$$

$$|MG| = \sqrt{288} = \frac{12\sqrt{2}}{2}$$

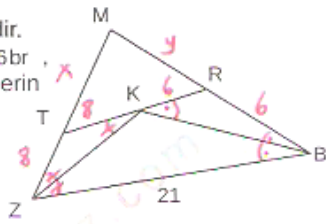
- 2) MTZ bir üçgendir.
 Şekilde
 $|TF| = 16\text{br}$ ise $|RF|$,
 $|TR| = 14\text{br}$ ise $|RZ|$
 kaç birimdir?



$$\frac{x}{x+14} = \frac{4}{16} \Rightarrow x = 14/3$$

$$y = \sqrt{\frac{14}{3} \cdot (\frac{14}{3} + 14)} - 4 \cdot 16 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

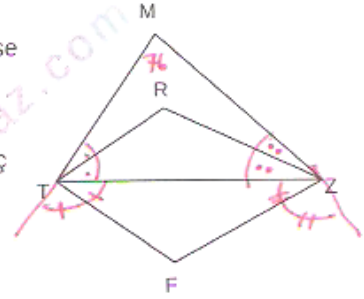
- 3) MBZ bir üçgendir.
 $|TZ| = 8\text{br}$, $|RB| = 6\text{br}$,
 K iç teğet çemberin
 merkezidir.
 $TR \parallel BZ$ ve
 $|ZB| = 21\text{br}$ ise
 $\angle(MZB)$
 kaçtır?



$$\frac{x}{x+8} = \frac{y}{y+8} = \frac{4}{21} \quad \begin{matrix} x=16 \\ y=12 \end{matrix}$$

$$\angle(MZB) = 21 + 24 + 18 = 63$$

- 4) MTZ bir üçgen, R
 içteğet çemberin, F ise
 dış teğet çemberin
 merkezidir.
 $m(\widehat{TMZ}) = 76^\circ$ ise
 $m(\widehat{TRZ}) - m(\widehat{TFZ})$ kaç
 derecedir?

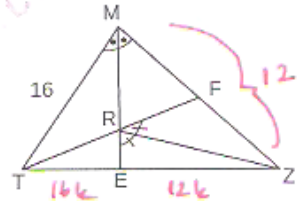


$$m(\widehat{TRZ}) = 90 + \frac{76}{2}$$

$$m(\widehat{TFZ}) = 90 - \frac{76}{2}$$

$$m(\widehat{TRZ}) - m(\widehat{TFZ}) = 38 + 38 = 76$$

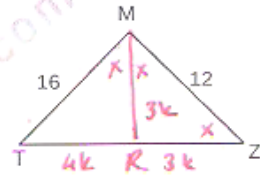
- 5) MTZ bir üçgendir.
 $m(\widehat{TME}) = m(\widehat{EMZ})$,
 $m(\widehat{ZRF}) = m(\widehat{ZRE})$
 $|TM| = 16\text{br}$ ve
 $|MZ| = 12\text{br}$ ise göre
 $\frac{|RT|}{|ER|}$ kaçtır?



$$\frac{|RE|}{|RT|} = \frac{12k}{28k} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{|RT|}{|ER|} = \frac{7}{3k}$$

- 6) MTZ bir üçgen
 $m(\widehat{ZMT}) = 2 \cdot m(\widehat{MZT})$ ise
 $|ZT|$ kaç birimdir?



$$\frac{7k}{RZ} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$9k^2 = 16 \cdot 12 - 4k \cdot 3k \rightarrow 2k^2 = 192$$

$$k = 8/\sqrt{7}$$

$$|ZT| = 7k = 7 \cdot \frac{8}{\sqrt{7}} = 8\sqrt{7}$$