

BENZERLİK VE ÖZEL TEOREMLER-4

BENZERLİK

Bir şekli belirli oranlarda büyüterek veya küçülterek benzerleri elde edilebilir.

Buradaki belirli orana Benzerlik Oranı denir.



İki doğru parçası, iki eşkenar üçgen, iki kare, iki çember, iki küp, iki küre... gibi şekil ve cisimlerin uzunlukları arasında daima bir oran vardır. Bu nedenle bunların her zaman birbirine benzer olduklarını söyleyebiliriz.

ÜÇGENLERİN BENZERLİĞİ

ABC ve MTZ üçgenleri arasında bire bir eşleme kurulduğunda; birinin kenarları diğerinin kenarlarının "k" katı ise, ABC ve MTZ üçgenleri benzerdir denir ve bu benzerlik $ABC \sim MTZ$ biçiminde gösterilir. ($k \in \mathbb{R}$)



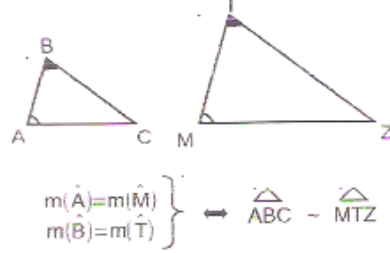
$$\triangle ABC \sim \triangle MTZ \Leftrightarrow \begin{cases} m(\hat{A})=m(\hat{M}) \\ m(\hat{B})=m(\hat{T}) \\ m(\hat{C})=m(\hat{Z}) \end{cases} \text{ ve } \frac{a}{m} = \frac{b}{t} = \frac{c}{z} = k$$

Ayrıca, iki üçgenin benzerlik oranı olarak,

- 1) Karşılıklı kenarlar oranı,
- 2) Karşılıklı kenarortaylar oranı,
- 3) Karşılıklı açıortaylar oranı,
- 4) Karşılıklı yükseklikler oranı,
- 5) Karşılıklı iç teğet çember yarıçapları oranı,
- 6) Karşılıklı dış teğet çember yarıçapları oranı,
- 7) Karşılıklı çevrel çember yarıçapları oranı,
- 8) Karşılıklı çevre uzunlukları oranı da alınabilir

BENZERLİK TEOREMLERİ

1. Açı - açı benzerliği



$$\left. \begin{matrix} m(\hat{A})=m(\hat{M}) \\ m(\hat{B})=m(\hat{T}) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MTZ$$

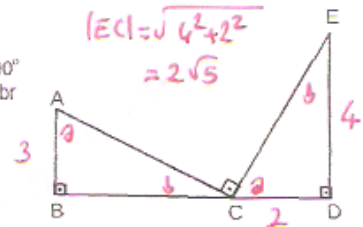
Örnek...1 :

B, C, D doğrusal noktalar.

$$m(\hat{B})=m(\hat{D})=m(\hat{CDE})=90^\circ$$

$$6, |CD|=4, |AB|=3|ED|=12br$$

|AC| kaç birimdir?

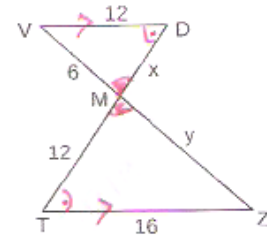


$$\triangle ABC \sim \triangle CDE$$

$$\frac{3}{2} = \frac{|AC|}{2\sqrt{5}} \Rightarrow |AC| = 3\sqrt{5}$$

Örnek...2 :

V, M, Z doğrusal noktalar. T, M, D doğrusal noktalar. [VD] // [TZ] dir. Verilen uzunluklara göre x+y kaçtır?



$$\triangle VDM \sim \triangle ZTM$$

$$\frac{12}{16} = \frac{6}{y} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 9$$

$$x + y = 8$$

BENZERLİK VE ÖZEL TEOREMLER-4

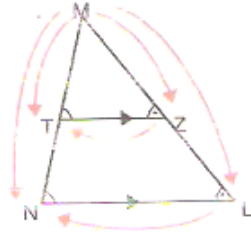
TEMEL ORANTI TEOREMİ

Bir üçgenin bir kenarına paralel olan bir doğru üçgenin diğer kenarlarını farklı noktalarda keserse, bu doğru kenarlar üzerinde orantılı parçalar ayırır

$TZ \parallel NL$ ise
 $MTZ \sim MNL$

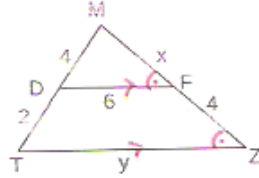
$$\frac{|MT|}{|MN|} = \frac{|MZ|}{|ML|} = \frac{|TZ|}{|NL|}$$

$$\frac{|MT|}{|TN|} = \frac{|MZ|}{|ZL|}$$



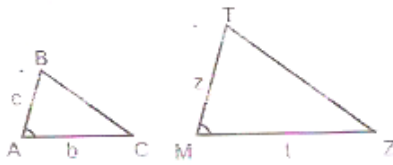
Örnek...3 :

MTZ bir üçgendir.
[DF] // [TZ] dir.
Verilen uzunluklara göre x+y kaçtır?



$\triangle MDF \sim \triangle MTZ$
 $\frac{4}{6} = \frac{6}{y} = \frac{x}{x+4} \Rightarrow y=9, x=8, x+y=17$

2. Kenar - açı - kenar benzerlik teoremi



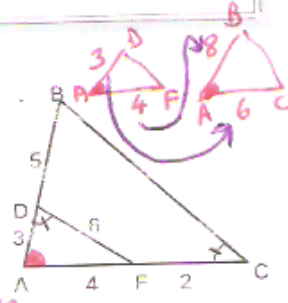
$$\left. \begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{M}) \\ \frac{c}{z} = \frac{b}{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MTZ$$

Örnek...4 :

ABC ve ADF birer üçgendir. Verilen uzunluklara göre |BC| kaçtır?

$\triangle ADF \sim \triangle ACB$

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{BC} \Rightarrow |BC| = 12$$



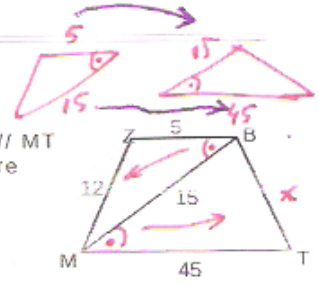
Örnek...5 :

$\triangle BM \sim \triangle MT$

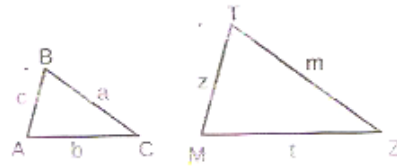
MTBZ dörtgeninde BZ // MT
Verilen uzunluklara göre |BT| kaç birimdir?

$$\frac{12}{x} = \frac{5}{15} = \frac{15}{45}$$

$x=36$



3. Kenar - kenar - kenar benzerlik teoremi



$$\frac{c}{z} = \frac{b}{t} = \frac{a}{m} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MTZ$$

Benzer iki şekilde karşılıklı uzunlukların oranı benzerlik oranına eşittir

Benzer iki şeklin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşittir

Benzer iki şeklin hacimlerinin oranı benzerlik oranının küpüne eşittir

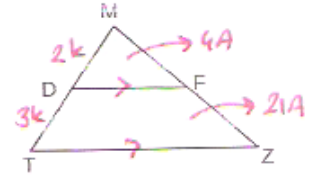
Örnek...6 :

MTZ bir üçgendir.
[DF] // [TZ] dir.
3. |MD|=2. |DT| .
A(ABC)=250 br² ise
A(MDF) kaç birim karedir?

$\triangle ADF \sim \triangle MTZ$ benzerlik $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$$25A = 250 \Rightarrow A = 10$$

$$A(MDF) = 4 \cdot 10 = 40$$

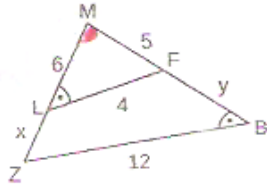


Pantograf, verilen bir şeklin daha büyüğünü daha küçüğünü ya da eşini çizmeye yarayan mekanik bir alettir.

BENZERLIK VE ÖZEL TEOREMLER-4

DEĞERLENDİRME - 1

- 1) MBZ bir üçgendir.
 $|ML|=6br$, $|MZ|=5br$,
 $|LF|=4br$, $|ZB|=12br$,
 $m(\hat{L})=m(\hat{B})$ olduğuna
 göre $x+y$ kaçtır?

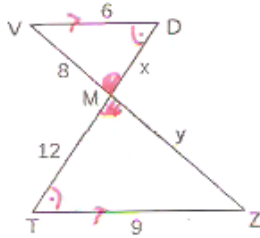


$\triangle MLF \sim \triangle MBZ$

$$\frac{5}{6+x} = \frac{4}{12} = \frac{6}{5+y}$$

$x=9$
 $y=13$

- 2) V,M,Z doğrusal noktaldır. T,M,D doğrusal noktaldır.
 $[VD] \parallel [TZ]$ dir.
 Verilen uzunluklara göre $x+y$ kaçtır?

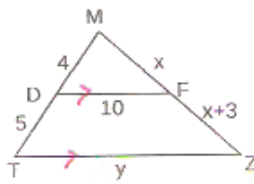


$\triangle VDM \sim \triangle TDM$

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{y} = \frac{x}{12}$$

$y=12$
 $x=8$
 $x+y=20$

- 3) MTZ bir üçgendir.
 $[FD] \parallel [TZ]$ dir.
 Verilen uzunluklara göre $x+y$ kaçtır?



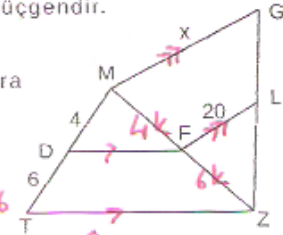
$\triangle MDF \sim \triangle MTZ$

$$\frac{4}{9} = \frac{10}{y} = \frac{x}{2x+3}$$

$y=22,5$ $x=12$
 $x+y=34,5$

- 4) MTZ ve MZG birer üçgendir.

$[FD] \parallel [TZ]$,
 $[LF] \parallel [MG]$ dir.
 Verilen uzunluklara göre x kaçtır?



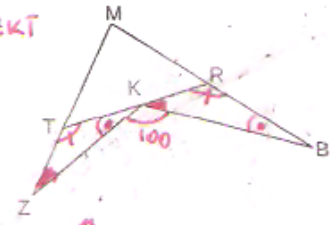
$\triangle MDF \sim \triangle MTZ$
 $\Rightarrow |MF| : |FZ| = 4 : 6$

$\triangle FLN \sim \triangle MZG$

$$\frac{6}{10} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 100/3$$

- 5) MTR bir üçgendir.

$\hat{K} \hat{B} \hat{K} \sim \hat{Z} \hat{K} \hat{T}$



$m(\hat{Z} \hat{K} \hat{K}) = m(\hat{B} \hat{K} \hat{K}) = 100$

$\Rightarrow m(\hat{M} \hat{T} \hat{R}) = m(\hat{R} \hat{M} \hat{T}) = 80$

$\Rightarrow m(\hat{M}) = 20^\circ$

- 6) TBZ bir eşkenar üçgendir. $m(\hat{BET})=120^\circ$,
 $|EB|=4br$, $|EM|=5br$,
 M,T ve Z doğrusal noktalar olduğuna göre eşkenar üçgenin bir kenarı kaç birimdir?



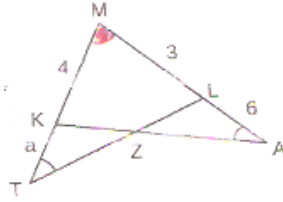
$\triangle BET \sim \triangle BTM$

$$\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$$

$x=6$

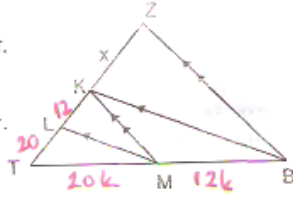
DEĞERLENDİRME - 2

- 1) MTL, MKA birer üçgendir.
 $m(\widehat{MAK}) = m(\widehat{MTL})$,
 verilen uzunluklara göre a kaçtır?



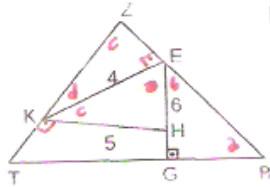
$\triangle MAK \sim \triangle MTL$
 $\frac{2+4}{9} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{11}{4}$

- 2) BTZ bir üçgendir. Şekilde $[LM] \parallel [KB]$, $[KM] \parallel [ZB]$ dir. $|TL|=20$ br ve $|LK|=12$ br ise x kaçtır?



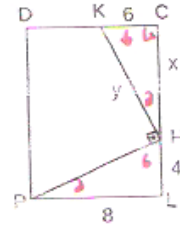
$\triangle TML \sim \triangle TBK \Rightarrow |TM|=20k$
 $|MB|=12k$
 $\triangle TKN \sim \triangle ZB$
 $\frac{32}{32+x} = \frac{20k}{32k} \Rightarrow x = \frac{96}{5}$

- 3) ZTB bir üçgen dir. $[EG] \perp [TB]$, $[KE] \perp [ZB]$, $[ZT] \perp [KH]$, $|KH|=5$ br, $|EH|=4$ br, ve $\angle(TZB)=60$ br ise $|BT|$ kaç birimdir?



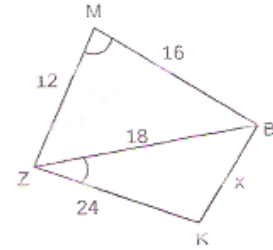
$\triangle EKH \sim \triangle ZT$
 $\angle(ZKH) = 15$ $\angle(TZB) = 60$
 benzerlik oranı $\frac{1}{4}$
 $\frac{6}{|BT|} = \frac{1}{4} \Rightarrow |BT| = 24$ br

- 4) PLCD bir dikdörtgendir. $[PH] \perp [KH]$. Verilen uzunluklara göre x,y kaçtır?



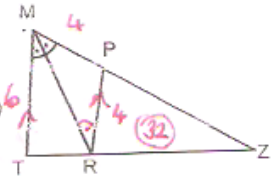
$|PH| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 4\sqrt{5}$
 $\triangle KCH \sim \triangle HLP$
 $\frac{y}{4\sqrt{5}} = \frac{x}{8} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 12$
 $y = 6\sqrt{5}$
 $x \cdot y = \frac{72\sqrt{5}}{2}$

- 5) MBZ ve BZK birer üçgendir. $m(\widehat{ZMB}) = m(\widehat{BZK})$, verilen uzunluklara göre x kaçtır?

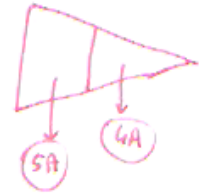


$\frac{12}{18} = \frac{16}{24}$
 $\Rightarrow \triangle MBZ \sim \triangle BZK$
 $\frac{12}{18} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{27}{2}$

- 6) MTZ bir üçgendir. $[RP] \parallel [TM]$ dir. $3 \cdot |PM| = 2 \cdot |MT| = 12$ br. $A(PRZ) = 32$ br² ise $A(MTZ)$ kaç birim karedir?



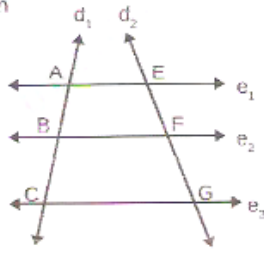
$\triangle PRZ \sim \triangle MTZ$
 $k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow k^2 = \frac{4}{9}$
 $4A = 32$
 $\Rightarrow 9A = 9 \cdot 8 = 72$



ÖZEL TEOREMLER

1. Thales Teoremi

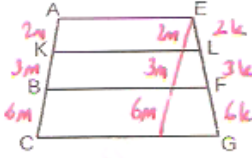
Birbirine paralel olan doğruların, herhangi iki kesen üzerinde ayırdığı karşılıklı doğru parçalarının uzunlukları orantılıdır.



Şekilde $e_1 \parallel e_2 \parallel e_3$ ve buradan $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|FG|}$

Örnek...1 :

Şekildeki $[AE] \parallel [KL] \parallel [BF] \parallel [CG]$,
3. $|EL|=2, |LF|=|FG|$
 $|AB|+|KC|=70$ br olduğuna göre $|AC|$ kaç birimdir?

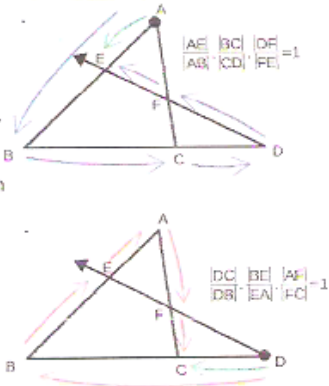


$5m + 9m = 70$
 $m = 5$

$|AC| = 11.5 = \frac{55}{2}$

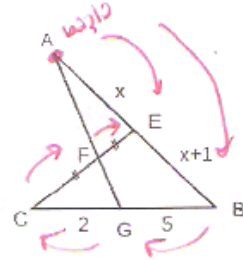
2. Menelaus Teoremi

ABC bir üçgen olsun. Üçgenin bir kenarının uzantısından alınan D noktasından çizilen ışın diğer iki kenarı iki noktada kesiyorsa yandaki bağıntılar geçerlidir



Örnek...2 :

AGB üçgen $|CF|=|FE|$
 $C \in BG, [CE] \cap [AG] = F$,
 $|CG|=2br, |GB|=5br$,
 $|AE|=xbr, |EB|=1+xbr$ verilen uzunluklara göre x kaçtır?

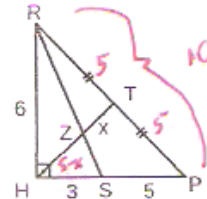


Menelaus!
 $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1$
 $5x = 4x+2 \rightarrow x=2$

Örnek...3 :

RHP dik üçgeninde $|RH|=6br, |HS|=3br, |SP|=5br$
 $|RT|=|TP|$ ise $|ZT|=x$ kaç birimdir?

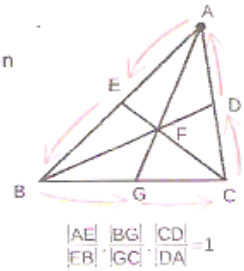
multiplier ile $|HT|=|RT|=|TP|$



$|HZ|=5-x$
Menelaus ile $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5-x}{x} = 1$
 $25-5x = 6x \rightarrow x = \frac{25}{11}$

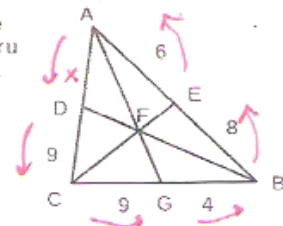
3. Ceva Teoremi

Üçgenin köşelerinden çıkıp karşı kenara çizilen doğru parçaları üçgenin içinde kesişiyorsa yandaki bağıntı geçerlidir.



Örnek...4 :

Şekildeki ABC üçgeninde A, B ve C den çıkan doğru parçaları F de kesişiyor. Üçgenin çevresi verilen uzunluklara göre kaç birimdir



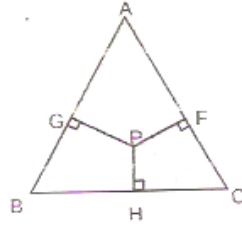
$\frac{x}{9} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{6} = 1$
 $x=3$

$Q(ABC) = 12 + 13 + 14 = \frac{39}{2}$

BENZERLİK VE ÖZEL TEOREMLER-4

4. Carnot Teoremi

ABC bir üçgen ve P iç bölgede herhangi bir nokta olsun. Bu noktadan kenarlara indirilen dikmeler için

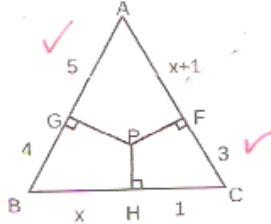


$$|AG|^2 + |BH|^2 + |CF|^2 = |GB|^2 + |HC|^2 + |AF|^2$$

bağıntısı geçerlidir.

Örnek...5 :

Şekilde ABC bir üçgen P iç bölgede bir nokta $[PH] \perp [BC]$, $[PF] \perp [AC]$, $[PG] \perp [AB]$ verilen uzunluklara göre x kaçtır?



$$x^2 + 3^2 + 5^2 = 1^2 + (x+1)^2 + 4^2$$

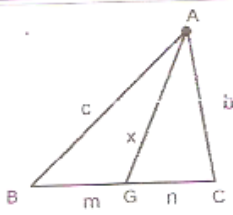
$$x^2 + 36 = x^2 + 2x + 1 + 16$$

$$34 = 2x + 18 \rightarrow 2x = 16$$

$$x = 8 \checkmark$$

5. Stewart Teoremi :

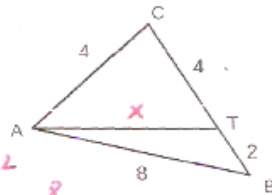
ABC üçgeninde $G \in [BC]$ için aşağıdaki bağıntı geçerlidir



$$x^2 = \frac{m \cdot b^2 + n \cdot c^2}{m+n} - m \cdot n$$

Örnek...6 :

ABC bir üçgen, $T \in [CB]$ verilen uzunluklara göre $|AT|$ kaç birimdir ?

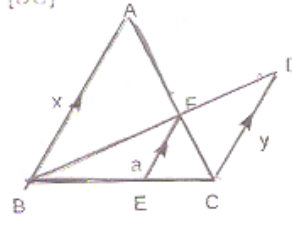


$$x^2 = \frac{2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 8^2}{8} - 8$$

$$x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} //$$

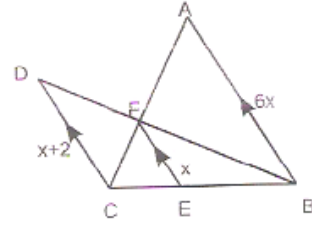
6. $[AB] \parallel [FE] \parallel [DC]$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$



Örnek...7 :

Şekilde $[AB] \parallel [FE] \parallel [DC]$ olduğuna göre $|DC|$ kaç birimdir?



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{6x}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x+2}$$

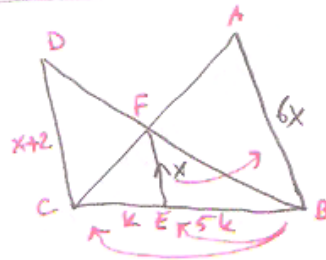
$$\frac{5}{6x} = \frac{1}{x+2}$$

$$5x+10 = 6x$$

$$x = 10$$

$$|DC| = 12$$

2.461



$\triangle CEF \sim \triangle CBA$
 $\triangle BFE \sim \triangle BDC$

$$\frac{5}{6} = \frac{x}{x+2} \rightarrow 5x+10 = 6x \rightarrow x = 10$$

$$|DC| = 12$$