OLASILIK (İHTİMALLER HESABI)

Olasılık kavramı ilk önceleri şans oyunları ile başlamıştır. Örneğin bir oyunda kazanıp kazanmama, bir paranın atılmasıyla tura gelip gelmemesi gibi. Bu gün bu kavramın birçok uygulanma alanları vardır.

OLASILIK HESABININ TEMEL KAVRAMLARI

1.DENEY :

Tanımsızdır. Para atmak, zar atmak gibi.

2.ÇIKTI:

Deneyde karşılaşılabilecek her bir sonuçtur.(Örnek nokta)

3.ÖRNEK UZAY:

Bir deneyde çıkabilecek tüm sonuçların oluşturduğu kümeye , örnek uzay denir ve E ile gösterilir.

Örnek...1 :

Bir madeni para atılması deneyinde çıktılar (örnek noktalar) Yazı(Y) ve Tura (T) ve örnek uzay E ={Y,T},
bir zar atma deneyinde çıktılar 1,2,3,4,5,6 ve örnek uzay E={ 1,2,3,4,5,6} olur.

4.OLAY :

Örnek uzayın her bir alt kümesine denir.

Örnek...2 :

Hilesiz iki zar atma deneyinin bütün çıktılarını aşağıdaki tabloya yazınız.

1.Zar \ 2. Zar	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)				
⚁						
⚂						
⚃		(4,2)			(4,5)	
⚄		(5,2)				
⚅	(6,1)					(6,6)

Tabloya göre İki zar atma deneyinde üst yüze aynı sayıların gelme olayı A olayı ise

A= {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}

5. KESİN OLAY VE İMKANSIZ OLAY :

Boş kümeye olanaksız olay, E örnek uzayına da kesin olay denir.
Bir zar atıldığında 7 den küçük gelmesi kesin olay, 8 den büyük gelmesi imkansız olaydır.

NOT

n para atılmasında s(E)= $2.2...2 = 2^n$

n zar atılmasında s(E)= $6.6...6 = 6^n$

k para ve m zarın atılması deneyinde

s(E)= $\underbrace{2...2}_{k}\ \underbrace{6.6...6}_{m} = 2^k.6^m$

Örnek...3 :

Farklı üç para atılıyor.

a) Örnek uzayı belirtiniz. s(E)=?

$\underset{Y,T}{2}\ \underset{Y,T}{2}\ \underset{Y,T}{2} \rightarrow s(E)=8$

b) En çok bir paranın tura gelmesi olayını yazınız.

1T → TYY ve farklı sıralanışları
0T → YYY
A = {YYY, TYY, YTY, YYT}

E örnek uzayının tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme (**kuvvet kümesi**) K olsun.
P : K → [0, 1] fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa P fonksiyonuna **olasılık fonksiyonu**, P(A) görüntüsüne de A olayının **olasılığı** denir.

1. $A \subset E \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$
2. $P(E) = 1$
3. $A, B \subset E$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

EŞ OLUMLU ÖRNEK UZAY

$E=\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ ve $P(e_1)= P(e_2)= \dots =P(e_n)$ oluyorsa E örnek uzayına eş olumlu örnek uzay denir.
Yani bir deneyde her bir çıktının olasılığı birbirine eşitse bu örnek uzaya eş olumlu örnek uzay denir.
E eş olumlu örnek uzayının bir olayı A ise A olayının olma olasılığı P(A) ile gösterilir.

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{\text{istenen durumlar}}{\text{tüm durumlar}}$$

olacak şekilde hesaplanır.

Örnek...4 :
Bir zar atıldığında

a) Tek sayı gelmesi

$A=\{1,3,5\} \to s(A)=3$
$s(E)=6$
$P(A)= 3/6 = 1/2$

b) Asal sayı gelmesi olasılıklarını bulunuz.

$B=\{2,3,5\}$ $P(B)=\frac{3}{6}=1/2$

Örnek...5 :
İki zarın birlikte atılması deneyinde

a) Toplamlarının 5 gelmesi

$A=\{(2,3),(3,2),(4,1),(1,4)\}$ $s(E)=36$
$P(A)= 4/36 = 1/9$

b) zarların aynı gelmesi

$B=\{(1,1),(2,2) \dots (6,6)\}$
$P(B)= 6/36 = 1/6$

c) ikisinin de tek sayı gelmesi olasılıklarını bulunuz.

$C=\{(1,1),(1,3) \dots (5,5)\}$ $s(C)=3.3=9$
$P(C)= 9/36 = \frac{1}{4}$

Örnek...6 :
A = { 1,2,3,4,5,6,7 } kümesinin alt kümeleri birer karta yazılıp bir kutuya konuyor. Kutudan bir kart çekiliyor. Bu kartta yazılı kümenin 3 elemanlı bir küme olma olasılığı nedir?

$s(E)=2^7$ $s(K)=\binom{7}{3}$
$P(K)=\frac{\binom{7}{3}}{2^7}=\frac{35}{128}$

UYARI

Eş olası olmayan durumda her bir çıktının olasılığı eşit olmak zorunda değildir.

Örnek...7 :
Hileli bir zarda bir yüzün gelme olasılığı üzerinde yazan yüzle doğru orantılıysa bu zar atıldığında 4 den büyük gelme olasılığı nedir?

$1 \to k$ $A=\{5,6\}$
$2 \to 2k$
$\vdots$
$6 \to 6k$

$$\frac{5k+6k}{\left(\frac{6.7}{2}\right).k}=\frac{11k}{21k}=\frac{11}{21}$$

UYARI

Bir olayın tümleyeni , o olayın sonuçları dışında kalan sonuçlar kümesidir.

A olayının tümleyeni A' ise

$P(A) + P(A') = P(E) = 1$ dir.

Örnek...8 :
Üç para atıldığında en az bir tura gelme ihtimali nedir?

1 – hiç tura → 1 – para yazı (YYY)
$s(A)=1 \to YYY$
$s(E)=8$
$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

AYRIK OLAYLAR

$A \subset E$ ve $B \subset E$ olmak üzere $A \cap B=\emptyset$ ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir.

Kısaca aynı anda gerçekleşmeyen olaylara ayrık olaylar deriz .

E: zar atılır
A → tek gelmesi
B → çift gelmesi
$A \cap B=\emptyset$

Örnek...9 :

Bir zar atıldığında tek sayı gelmesi olayı A ve çift sayı gelme olayı B ise A ve B ayrık olaylardır.

UYARI

A ve B olayları ayrık olaylar ise

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A ve B olayları ayrık olaylar değil ise

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

olarak hesaplanır.

Örnek...10 :

A, B ve olaylarının olasılıkları

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

olarak veriliyor.
İstenen olayların olasılıklarını bulunuz?

a) $P(A')$ $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

b) $P(B')$ $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) $P(A \cup B)$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{7}{12} - \frac{1}{5} = \frac{23}{35}$

d) $P(A \cap B')$ $P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$

$\frac{1}{3} = P(A \cap B') + \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{2}{15}$

e) $P(A' \cup B')$ $= P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - \frac{1}{5} = 4/5$

Örnek...11 :

Üç takımlı bir ligde karşılaşan A,B,C takımlarının şampiyon olma olasılıkları sırası ile x,2x ve 3x tir. Bu ligde A veya C nin şampiyon olma olasılığı nedir?

$P(A \cup B \cup C) = x + 2x + 3x = 6x = 1$ $x = 1/6$

$P(A \cup C) = x + 3x = 4x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Örnek...12 :

Bir sınıftaki öğrencilerin 20 tanesi erkek ve 10 tanesi kızdır. Erkeklerin 5 i, kızların 6 sı mavi gözlüdür. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız veya mavi gözlü olması olasılığı nedir?

	M+	M−
K	6	4
E	5	15

→ istenen

$P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

DEĞERLENDİRME – 1

1) A, B ve olaylarının olasılıkları $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ olarak veriliyor $P(A' \cap B')$ olasılığı kaçtır?

$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{37}{60}$

2) 34 kişilik bir anadolu lisesi sınıfında, gözlüklü kız öğrenci sayısı 12' dir.Gözlüksüz erkeklerin sayısı gözlüksüz kızların sayısının 4 katı ve erkek öğrenci sayısı kız öğrenci sayısının 2 katından 11 eksik ise sınıftan seçilecek bir öğrencinin gözlüksüz kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

	6+	6−
K	12	x
E	22−5x	4x

$22 - x = 2(x + 12) - 11$

$22 - x = 2x + 13$

$3x = 9$

$x = 3 \rightarrow P(A) = \frac{3}{34}$

3) A = { 1,2,3,4} için AxA kümesinden seçilecek bir ikilide bileşenlerin eşit olma olasığı kaçtır?

$s(A \times A) = 16 = s(E)$

$\beta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$s(\beta) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

4) Hilesiz iki zar atıldığında toplamın 7 den büyük gelme olasılığı kaçtır?

Topl	durum sayısı
12	1
11	2
10	3
9	4
8	+ 5
	15 durum

$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

5) Hileli bir zarda bir yüzün gelme olasılığı üzerinde yazan yüzle ters orantılıysa bu zar atıldığında 4 den küçük gelme olasılığı kaçtır?

$1 \rightarrow k$

$2 \rightarrow k/2$

$3 \rightarrow k/3$

$4 \rightarrow k/4$

$5 \rightarrow k/5$

$6 \rightarrow k/6$

$\dfrac{k + k/2 + k/3}{k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6}} = \dfrac{11k/6}{147k/60} = \dfrac{110}{147}$