OLASILIK (İHTİMALLER HESABI)

Olasılık kavramı ilk önceleri şans oyunları ile başlamıştır. Örneğin bir oyunda kazanıp kazanmama, bir paranın atılmasıyla tura gelip gelmemesi gibi. Günümüzde meteorolojik tahminlerden, tıp alanındaki öngörülere, spor karşılaşmalarından yatırım portföylerinin risklerine kadar sonucu kesin olmayan durumlara yönelik beklentiler söz konusu olduğunda olasılık kavramı önemli bir rol oynamaktadır.

OLASILIK HESABININ TEMEL KAVRAMLARI

Deney : Tanımsızdır. Para atmak, zar atmak gibi. Tekrarlanabilen, farklı tekrarında farklı sonuçlar elde edilebilen süreçler birer deney olarak düşünülür.

Çıktı: Deneyde karşılaşılabilecek her bir sonuçtur.(Örnek nokta)
Örneğin zar atıldığında 3 çıktılardan biridir.

Örnek Uzay: Bir deneyde çıkabilecek tüm sonuçların oluşturduğu kümeye, örnek uzay denir ve E ile gösterilir. Örneğin para atılması deneyinde E={Yazı, Tura} kümesidir.

Olay : Örnek uzayın her bir alt kümesine denir. Örneğin bir kişinin deniz yolu, kara yolu ya da hava yolundan birini seçerek seyahat etmesi (bir olay içerir) ya da atılan hilesiz iki sayı küpünün üst yüzeylerine tek ve asal sayı gelmesi (İki olay içerir) olaya örnektir.

Örnek...1 :
İki para aynı anda atılıyor. Buna göre
a) Örnek Uzayı yazınız.
b) Paraların aynı gelme olayı A olayıdır. A olayını yazınız.

a) çıktılar Y=yazı T=tura olmak üzere TT TY YT YY ve .örnek uzay
E= {(T,T),(T,Y),(T,Y),(Y,Y)}
b) A={(Y,Y),(T,T)}

Örnek uzayın eleman sayısı
n para atılması deneyinde 2^n,
n zar atılması deneyinde 6^n,
m zar ve n para atılması deneyinde $6^m.2^n$ olur.

DENEYSEL OLASILIK (GÖRELİ SIKLIK)

Bir olayın olma olasılığını yapılan denemelerin sonuçlarına göre bulmaya deneysel olasılık denir. Bir olasılık deneyi yapılırken çıktılar kaydedilir ve tekrar sayıları (frekanslar) bir tabloda özetlenir. Deneyde gözlemlenen herhangi bir çıktının tekrar sayısının tüm çıktıların sayısına oranına o çıktının göreli sıklığı (deneysel olasılığı) denir.

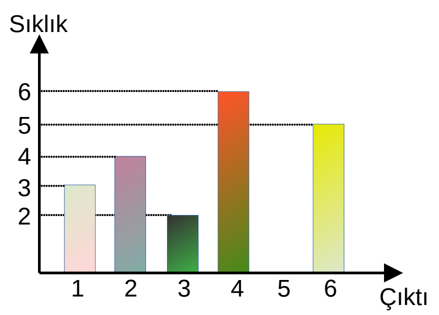
$$\text{Deneysel Olasılık} = \frac{\text{Çıktının Gerçekleşme Sayısı}}{\text{Tüm Denemelerin Sayısı}}$$

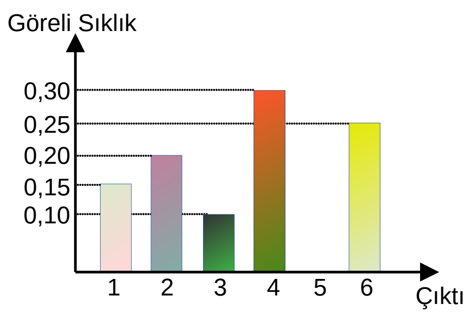
Sıklıkların (frekansların) toplamı deneyin tekrar sayısını verir.

Örnek...2 :
20 kez havaya atılan zarın üst yüzüne gelen sayılarla ilgili aşağıdaki tablo düzenleniyor.

Çıktılar	1	2	3	4	5	6
Tekrar Sayısı	3	4	2	6	0	5

Buna göre, bu deneye ait
a) sıklık grafiğini
b) göreli sıklık grafikleri çizilmiştir.
İnceleyiniz.

a)


b)


Bir olayın aynı tekrar sayısına ait sıklık ve göreli sıklık grafiklerinin şekli, eksenlerdeki değerler hariç aynıdır.

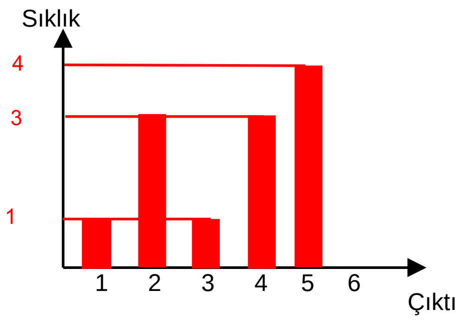
Örnek...3 :

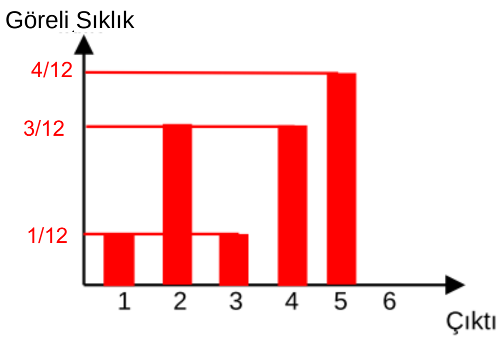
12 kez atılan bir zarın üst yüzüne 3 kez 2 , 4 kez 5 , 3 kez 4, 1 kez 3, 1 kez 1 geldiği görülmüştür.
Buna göre,

a) Tabloyu uygun şekilde tamamlayınız.

Çıktılar	1	2	3	4	5	6
Çetele	/	//	///	////	/////	/// ///
Sıklık	1	3	1	3	4	0
Göreli Sıklık	1/12	3/12	1/12	3/12	4/12	0

b)Boş grafik şablonlarında sıklık ve göreli sıklıklara ait sütun grafiklerini oluşturunuz.





c) Bu zarın üst yüzüne 13. atışta 6 gelme olayının deneysel olasılığını (göreli sıklık değerini) bulunuz.

0/12=0

d) Bu deneyde tekrar sayısı 50'ye çıkarılırsa dağılımlarda nasıl bir değişim olmasını beklersiniz?

Deneme sayısı ne kadar çok olursa ortaya sıklıkların (çıkan değerlerin) birbirine yaklaşık sayılara ulaşmasını bekleriz

Deneme sayısı ne kadar çok olursa ortaya çıkan olasılık değeri o kadar **kararlı** olur (büyük sayılar yasası). Deneysel olasılık değeri teorik olasılık değerine yaklaşır.

Deneme sayısının az olması, uzun vadede (tekrar sayısının arttırılmasıyla elde edilen) gözlemlenen sonuçlardan oldukça farklı olabilir.

Gözleme dayalı tahmin edebilmede gerçek yaşamda sınırlılık olduğu için istatistik yazılımı yardımıyla deneylerin tekrar sayısı istendiği kadar artırılabilir.

Eğer deneydeki her bir çıktı eş olasılıklı değilse deneysel olasılıktan yararlanılır.

Örnek...4 :

Aşağıdaki tabloda zar atma deneyinin istatistik yazılımı yardımıyla tekrar sayısı arttırılmış ve sıklık tablosu oluşturulmuştur. İnceleyiniz.

Tekrar sayısı	1	2	3	4	5	6
10	3	2	3	1	1	0
20	4	3	2	4	3	4
50	6	12	8	14	5	5
100	14	18	16	15	17	20
250	40	45	42	44	46	33
500	85	80	72	88	90	85

Tabloya göre zarın en yakın tekrar sayısını göz önünde bulundurarak 21.atışta 5, 101.atışta 6 ve 501. atışta 4 gelme olasılıklarını bulunuz.

21. atışta 5 gelme olasılığı $\frac{3}{20}$
101. atışta 6 gelme olasılığı $\frac{20}{100}$
501. atışta 4 gelme olasılığı 88/500

Örnek...5 :

Bir atıcı, hedefe 28 atış yapmış 21 inde hedefi vurmuştur. Bu atıcının bir sonraki atışında hedefi vuramamasının deneysel olasılık değeri kaçtır?

21 başarılı
7 başarısız

29. atışta başarısız olma olasılığı

$\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

Örnek...6 :

Kart numarası	1	2	3	4	5
Seçilme sayısı	12	8	10	16	4

Haluk 1 den 5 e kadar numaralandırılmış 5 karttan rastgele bir kart seçme deneyini 50 kez tekrar etmiş ve deney sonucunda seçilen kartların üzerindeki numaraların dağılımıyla yukarıdaki tabloyu oluşturmuştur.

Buna göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. 4 nolu kartın seçilmesi olayının deneysel olasılığı kaçtır?

$\frac{16}{50} = \frac{8}{25}$

b. Asal sayı olan bir kartın seçilmesi olayının deneysel olasılığı kaçtır?

2, 3 ya da 5 isteniyor

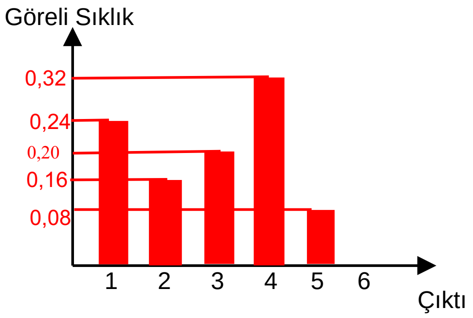
dosılık $\frac{8+10+4}{50} = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$

c. Seçilen kartın numarasının 3 ten küçük olması olayının deneysel olasılığı kaçtır?

İstenen 1 veya 2

$\frac{12+8}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

d) Çıktıların göreli sıklık grafiğini çiziniz.



TEORİK OLASILIK

Bir olasılık deneyinden teorik olarak beklenen olasılığa denir.
Olayların teorik olasılık değeri hesaplanırken olası tüm çıktılar görselleştirilir. Görselleştirme
1.Sistematik Liste
2.Tablo (Olay sayısı<3)
3.Ağaç Şeması
yollarıyla yapılabilir.

Örnek...7 :
Hilesiz iki madeni paranın havaya atılması deneyinde tüm çıktıları görselleştirilmiştir. İnceleyiniz.

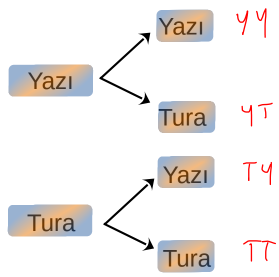
a. Sistematik Liste ile

1. Para	Y	Y	T	T
2.Para	Y	T	Y	T

b. Tablo ile

2.Para	1. Para	
	Y	T
Y	YY	YT
T	YT	TT

c) Ağaç Şeması ile



Görselleştirilen olası tüm çıktılar içinden istenen çıktılar belirlenir. İstenen çıktıların sayısının olası tüm çıktıların sayısına oranı,incelenen olayın teorik olasılık değerini verir.

Teorik olasılık hesaplanırken her bir çıktının eş olumlu olması gerekir.

EŞ OLUMLU ÖRNEK UZAY

$E=\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ ve
$P(e_1)= P(e_2)= \ldots =P(e_n)$ oluyorsa E örnek uzayına eş olumlu örnek uzay denir. deneyde her bir çıktının olasılığı birbirine eşittir. (deney hilesizdir)
E eş olumlu örnek uzayının bir olayı A ise A olayının olma olasılığı P(A) ile gösterilir.

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{\text{istenen durumlar}}{\text{tüm durumlar}} \text{ dır}$$

Deneysel olasılık değeri, deneme sayısı arttıkça teorik olasılık değerine yaklaşır.

Örnek...8 :

Hilesiz iki zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların toplamının tek sayı olması olayının teorik olasılığı hesaplanmak isteniyor. Tabloyu doldurup olasılığı hesaplayınız .

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Örnek...9 :

Bir zar ve bir para atıldığında zarın 4 ve paranın tura gelme olasılığını bulunuz hesaplayınız.

4 → 1 2 3 4 5 6

T → 1 2 3 4 5 6

istenen durum sayısı 1 → (T,4)
tüm durum sayısı 12

olasılık = $\frac{1}{12}$

Örnek...10 :

	Kız	Erkek
Sarışın	4	6
Esmer	12	14

Yukarıdaki tabloda bir sınıftaki kız ve erkek öğrencilerin gözlüklü ve gözlüksüz öğrenci sayıları verilmiştir. Buna göre, bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya esmer bir öğrenci olma olasılığını hesaplayınız.

istenen durum sayısı 12+14+6 = 32
tüm durum sayısı 4+12+6+14 = 36

olasılık $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

Örnek...11 :

Bir sınıftaki 45 öğrenciden 24'ü kızdır. Kızların 7'si, erkeklerin 4'ü gözlüklüdür. Buna göre bu sınıftan seçilecek bir öğrencinin

a) gözlüklü veya erkek öğrenci olma olayının olasılık değerlerini hesaplayınız.

b) gözlüksüz ve erkek öğrenci olma olayının olasılık değerlerini hesaplayınız.

	Gözlüklü	Gözlüksüz
Kız	7	17
Erkek	4	17

a) istenen durum sayısı : 7+4+17 = 28
tüm durumlar : 45
olasılık $\frac{28}{45}$

b) istenen d. s. = 17
tüm d. s. = 45
olasılık 17/45

AYRIK OLAYLAR

Aynı örnek uzaya ait iki olayın ortak çıktısı yoksa bunlar ayrık olaylar, ortak çıktısı varsa ayrık olmayan olaylar olur. Sembolik olarak $A \subset E$ ve $B \subset E$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir.

A ve B olayları ayrık olaylar ise
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A ve B olayları ayrık olaylar değil ise
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
olarak hesaplanır.

Örnek...12 :

Bir zar atıldığında A olayı zarın üst yüzüne tek sayı gelme olayı , B olayı zarın üst yüzüne çift sayı gelme olayı ve C olayı zarın asal sayı gelmesi

a) A ve B olayları ayrık olaylar mıdır?
b) A ve C olayları ayrık olaylar mıdır?
c) C ve B olayları ayrık olaylar mıdır?

$A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $C = \{2, 3, 5\}$

a) $A \cap B = \emptyset$ A ve B ayrıktır
b) $A \cap C = \{3, 5\}$ A ve C ayrık değildir
c) $B \cap C = \{2\}$ B ve C ayrık değildir.

Örnek...13 :

	Marka		
Cihaz	A	B	C
Telefon	10	20	30
Tablet	20	0	25
Robot Süpürge	35	5	0
Dizüstü bilgisayar	5	35	20
Toplam	70	60	75

Toplam 205

Üstteki tabloda bir teknoloji mağazasının 2020 Mart ayında sattığı A, B ve C markalarına ait cihazların adetleri verilmiştir. Buna göre, mağazadan alınan bir ürünün

a) C marka veya robot süpürge olma olayının olasılık değeri kaçtır?

b) A marka veya tablet olma olayının olasılık değeri kaçtır?

a) C marka C ve robot süpürge R olayı olsun

$P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(R \cap C)$

$= \frac{75}{205} + \frac{40}{205} - \frac{0}{205} = \frac{115}{205} = \frac{23}{41}$

b) A marka A , tablet T

$P(A \cup T) = P(A) + P(T) - P(A \cap T)$

$= \frac{70}{205} + \frac{45}{205} - \frac{20}{205} = \frac{95}{205} = \frac{19}{41}$