

## ÜÇGENLER-7

### KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

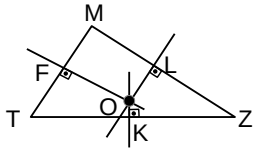
#### KENAR ORTA DİKME

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir.

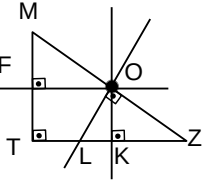
Bir üçgende kenar orta dikmeler bir noktada kesişir. Bu nokta çevrel çemberin merkezidir. (Üçgenin köşelerinden geçen çember) Çevrel çemberin merkezi üçgenin açısına göre farklı bölgelere ait olabilir.

**Durum 1** Dar açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesim noktası üçgenin içindedir.

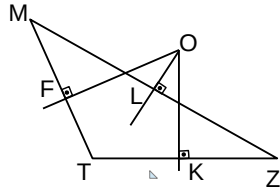
$[OF] \perp [MT]$ ,  
 $[OL] \perp [MZ]$ ,  
 $[OK] \perp [ZT]$ ,  
 $|MF|=|TF|$ ,  
 $|TK|=|KZ|$ ,  
 $|ZL|=|LM|$



**Durum 2** Dik açılı üçgende kenar orta dikmeler hipotenüs üzerinde kesişir



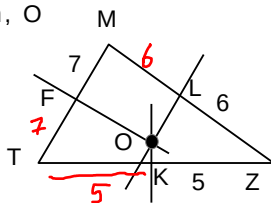
**Durum 3** Geniş açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesim noktası üçgenin dış bölgesindedir.



Şekillerde O noktası kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır. (çevrel çemberin [üçgenin köşe noktalarından geçen çember] merkezidir)

#### Örnek...1 :

Şekilde MTZ bir üçgen, O noktası kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır.  $|MF|=7$  br,  $|KZ|=5$  br,  $|LZ|=6$  birim olduğuna göre  $\angle(MTZ)$  kaç birimdir?



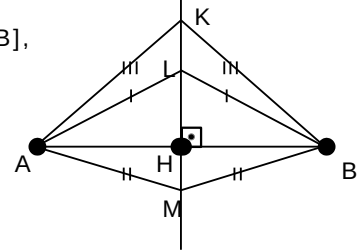
$$\angle(MTZ) = 36$$

#### Uyarı

Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır ve bunun karşıtı da doğrudur.

Şekilde  $KM \perp [AB]$ ,

$|LA|=|LB|$ ,  
 $|MA|=|MB|$ ,  
 $|KA|=|KB|$



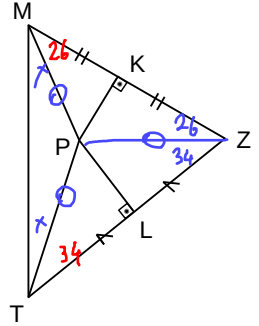
#### Örnek...2 :

MTZ bir üçgen,  $[KP] \perp [MZ]$ ,  $[LP] \perp [TZ]$ ,  $m(\angle PTL)=34^\circ$ ,  $m(\angle PMK)=26^\circ$ , olduğuna göre  $m(\angle MPT)$  kaç derecedir?

$$2x + 52 + 68 = 180$$

$$2x + 120 = 180$$

$$x = 30$$



#### Örnek...3 :

O noktası MTZ üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır.  $|MZ|=12$  br,  $|TZ|=6$  br dir. Buna göre  $|MT|$  kaç farklı tamsayı değeri alır?

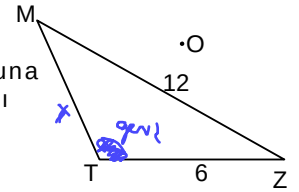
$$12 - 6 < x < 12 + 6$$

$$x^2 + 6^2 < 12^2$$

$$6 < x < \sqrt{108}$$

$$x = 7, 8, 9, 10$$

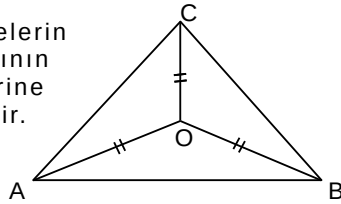
4 değer



#### Uyarı

kenarorta dikmelerin kesişme noktasının üçgenin köşelerine uzaklıkları eşittir.

Şekilde O noktası kenar orta dikmelerin kesişme noktası,  $|AO|=|OB|=|OC|$  dir.



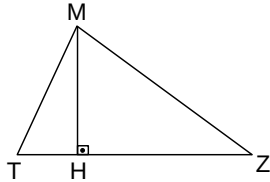
## ÜÇGENLER-7

### KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

#### YÜKSEKLİK VE DİKLİK MERKEZİ

Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına dik olarak indirilen doğru parçasına o kenara ait yükseklik denir.

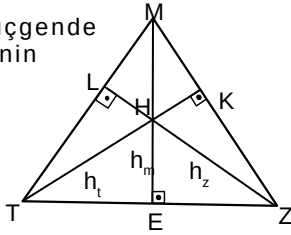
Şekilde [MH], [TZ] nin yüksekliğidir.



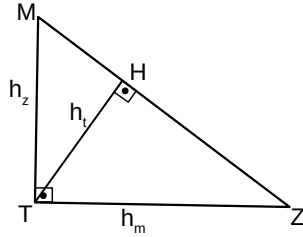
H noktasına dikme ayağı denir. Kenar m olarak gösterildiğinde  $|MH| = h_m$  ile gösterilir.

Bir üçgende yükseklikleri tek noktada kesişir. Bu nokta diklik merkezidir. Diklik merkezi üçgenin açılına göre farklı bölgelere ait olabilir.

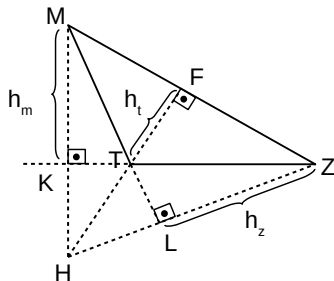
**Durum 1** Dar açılı üçgende diklik merkezi üçgenin içindedir.



**Durum 2** Dik açılı üçgende diklik merkezi üçgende dik kenarların birleştiği köşedir



**Durum 2** Geniş açılı üçgende diklik merkezi üçgenin dış bölgesindedir.



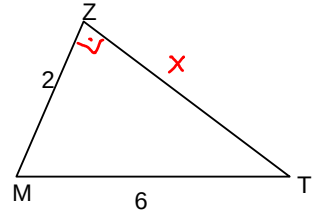
Şekillerde H noktası diklik merkezidir

#### Örnek...4 :

Şekilde  $|ZM|=2$  br,  $|MT|=6$  br dir. Z noktası, MTZ üçgeninin diklik merkezi ise  $|ZT|$  kaç birimdir?

$$x = \sqrt{36 - 4}$$

$$x = 4\sqrt{2}$$



#### Örnek...5 :

Şekilde  $|ZM|=6$  br,  $|MT|=4$  br dir. K noktası, MTZ üçgeninin diklik merkezi ise  $|ZT|$  nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

$$6 - 4 < x < 6 + 4$$

$$x^2 < 6^2 + 4^2$$

$$x < \sqrt{52}$$

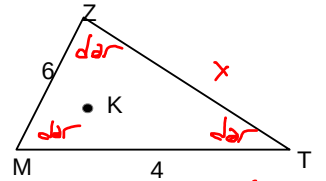
$$6^2 < 4^2 + x^2$$

$$\sqrt{20} < x$$

$$4^2 < x^2 + 6^2$$

$$x = 5, 6, 7$$

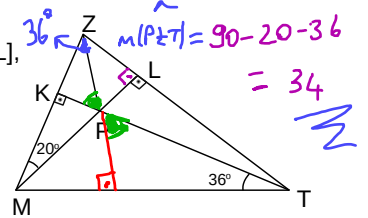
3 değer



#### Örnek...6 :

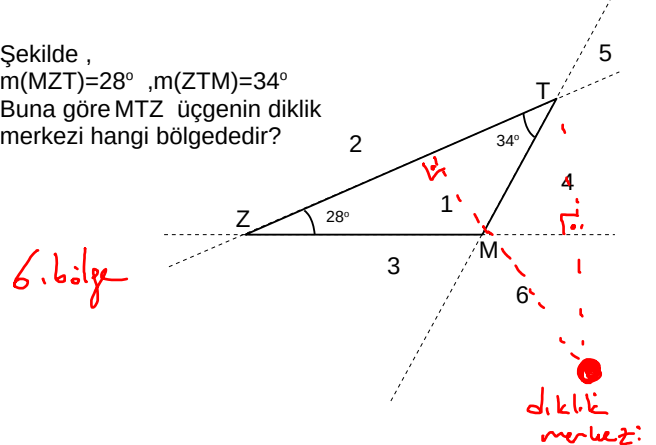
Şekilde MTZ bir üçgen,  $[KT] \perp [ML]$ ,  $[KT] \cap [ML] = \{P\}$  dir. Buna göre  $m(\angle PZT)$  kaç derecedir?

P diklik merkezi



#### Örnek...7 :

Şekilde ,  $m(\angle MZT)=28^\circ$  ,  $m(\angle ZTM)=34^\circ$  Buna göre MTZ üçgenin diklik merkezi hangi bölgededir?

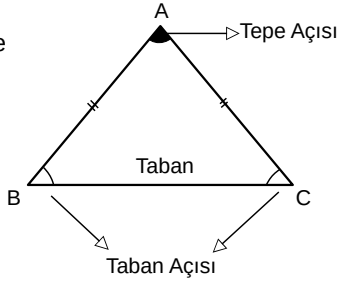


## ÜÇGENLER-7

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### İKİZKENAR ÜÇGEN

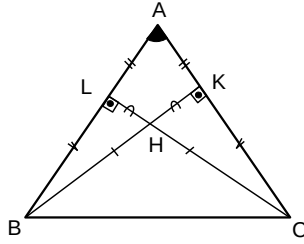
Herhangi iki kenarı birbirine eşit olan üçgendir.



Taban açıları eşittir.  $m(\widehat{B})=m(\widehat{C})$

Eşit kenarlara ait yükseklikler, iç açıortaylar ve kenarortaylar eşittir  $h_b=h_c$ ,  $V_b=V_c$ ,  $n_b=n_c$

Yandaki ikizkenar üçgende  $|AB|=|AC|$  ve buradan eşlik kullanarak şu sonuçları çıkarabiliriz  $m(\widehat{ABK})=m(\widehat{ACL})$ ,  $|KC|=|BL|$ ,  $|LH|=|HK|$



### Örnek...8 :

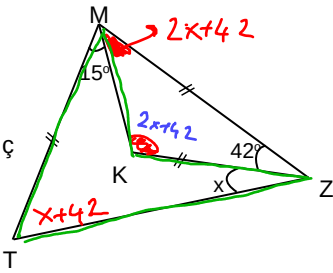
MTZ bir üçgendir.

$|TM|=|MZ|=|KZ|$ ,

$m(\widehat{KZM})=42^\circ$

$m(\widehat{KMT})=15^\circ$

olduğuna göre x kaç derecedir?

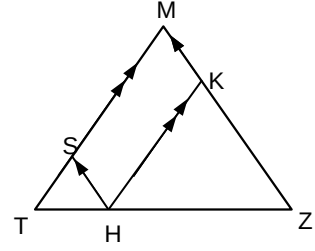


$$4x + 84 + 42 = 180$$

$$4x = 180 - 126$$

$$x = 13,5$$

$|MT|=|MZ|$ , H taban üzerinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS]//[MZ]$ ,  $[HK]//[MT]$  ise



$|HS|+|HK|=|MT|=|MZ|$  olur

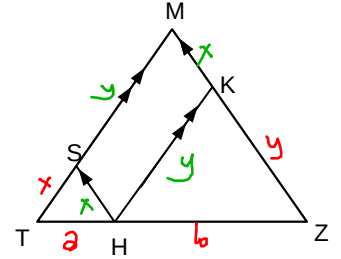
### Örnek...9 :

MTZ bir ikizkenar üçgen

$|HS|+|HK|=13$  br ve

$|TH|+|HZ|=10$  br ise MTZ

üçgeninin alanı kaç birim karedir?

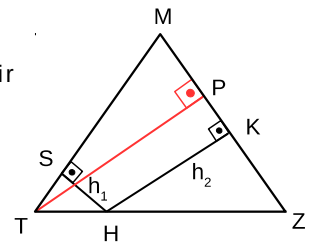


$$x + y = 13$$

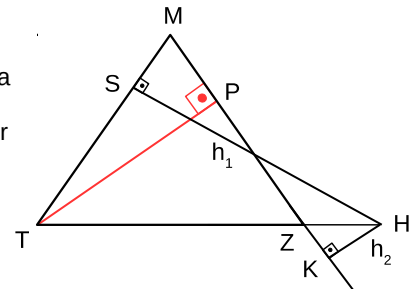
$$a + b = 10$$

$$A(MTZ) = 2x + 2y + a + b = 36$$

$|MT|=|MZ|$ , H taban üzerinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$  ise  $h_1 + h_2 = h_t = h_z$  olur



$|MT|=|MZ|$ , H taban uzantısında alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$  ise



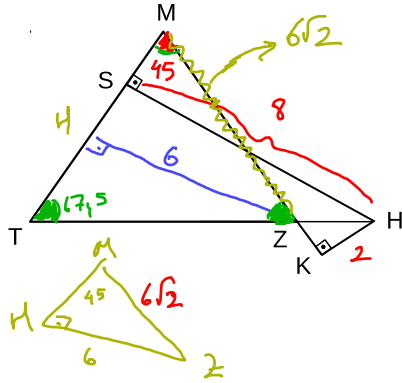
$|MS|-|MK|=h_1-h_2=h_t=h_z$  olur

## ÜÇGENLER-7

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### Örnek...10 :

Yandaki MTZ  
üçgeninde  
 $[HS] \perp [MT]$   
 $[HK] \perp [MK]$   
 $|HK|=2br$   
 $|HS|=8br$ ,  
 $m(\widehat{MZT})=67,5^\circ$   
olduğuna göre  
 $|MT|=|MZ|$  kaç  
birimdir?



### Örnek...11 :

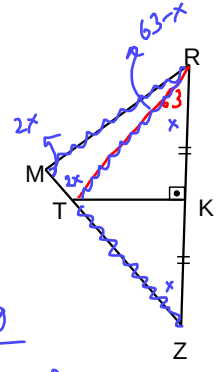
MRZ bir üçgen  $|MR|=|TZ|$   
 $m(\widehat{RKT})=90^\circ$  ve  
 $m(\widehat{MRK})=63^\circ$  ise  $m(\widehat{M})$  kaç  
derecedir?

$$2x + 2x + 63 - x = 180$$

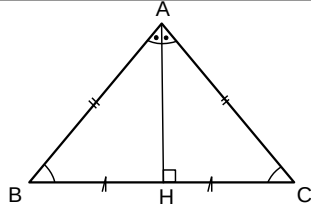
$$63 + 3x = 180$$

$$21 + x = 60 \rightarrow x = 39$$

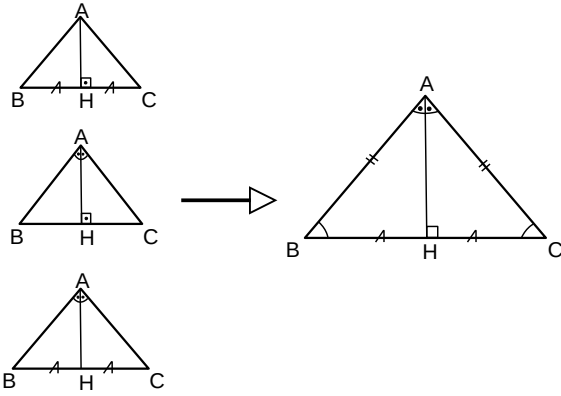
$$m(\widehat{M}) = 2 \cdot 39 = 78^\circ$$



$|AB|=|AC|$  ise A  
köşesinden  
indirilen dikme  
aynı zamanda  
açıortay ve  
kenarortaydır.



Bir köşeye ait yükseklik, açıortay veya  
kenarortaydan herhangi ikisi aynı ise  
üçgen en azından ikizkenardır



### Örnek...12 :

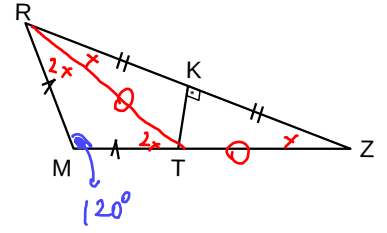
MRZ bir üçgen  
 $|MR|=|MT|$ ,  $|RK|=|KZ|$ ,  
 $m(\widehat{TKZ})=90^\circ$ ,  
 $m(\widehat{RMZ})=120^\circ$  ve  
 $|TZ|=20br$  ise  
 $A(\widehat{TKZ})$  kaç birim  
karedir?

$$120 + 2x + x + x = 180$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

$$m(\widehat{TKZ}) = 15^\circ$$



### Örnek...13 :

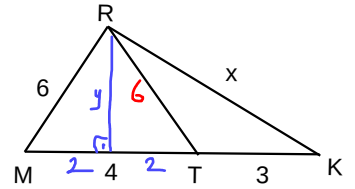
KMR bir üçgen  
 $|MR|=|RT|=6br$ ,  $|MT|=4br$ ,  
 $|KT|=3br$  ise x kaç  
birimdir?

$$y^2 + 2^2 = 36$$

$$y^2 = 32$$

$$y^2 + 25 = x^2$$

$$32 + 25 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{57}$$

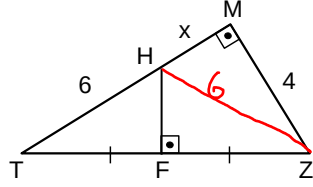


## ÜÇGENLER-7

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### DEĞERLENDİRME - 1

- 1) TMZ ,HFT birer dik üçgendir.  
 $|HT|=6$  br ,  
 $|FT|=|FZ|$   
 $|MZ|=4$  br  $|HM|$   
 kaç birimdir?

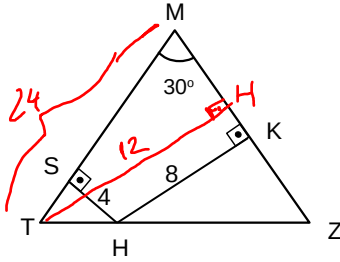


$$x^2 + 4^2 = 36$$

$$x^2 = 20$$

$$x = 2\sqrt{5}$$

- 2) MTZ bir üçgen ikizkenar üçgen ,  
 $[SH] \perp [MT]$  ,  
 $[HK] \perp [MZ]$   
 $2 \cdot |SH| = |HK| = 8$  cm,  
 ise  $|MT|$  kaç cm dir?

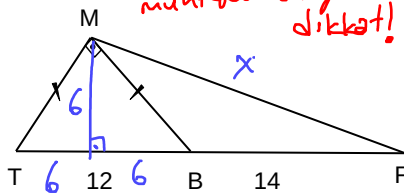


$$|TH| = 8 + 4 = 12 \text{ cm}$$

$$\hat{T} \hat{H} \hat{M} \quad 30-60-90$$

$$|TM| = 24$$

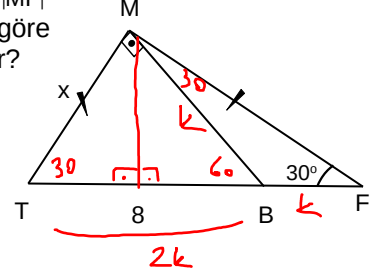
- 3) TMB bir dik üçgen  
 $|MT|=|MB|$   
 $|TB|=12$  br ,  
 $|BF|=14$  br  
 ise  $|MF|$   
 kaç birimdir?



$$x^2 = 6^2 + 20^2$$

$$x = 2\sqrt{109}$$

- 4) MTF ikizkenar, TMB dik üçgendir.  
 $[TM] \perp [MB]$  ,  $|TM|=|MF|$   
 $|TB|=8$  br olduğuna göre  
 $|MT|=x$  kaç birimdir?

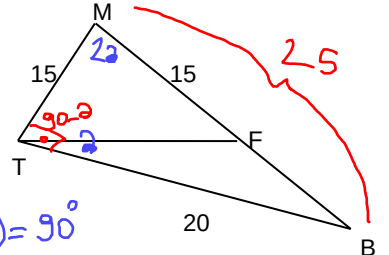


$$k = 4$$

$$x = k\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

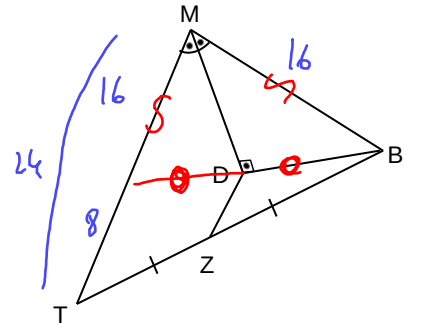
- 5) MTB bir üçgendir.  
 $F \in [MB]$  ,  
 $|MT|=|FM|=15$  br ,  
 $m(\hat{T}MF) = 2 \cdot m(\hat{F}TB)$  ,  
 $|TB|=20$  br .  
 Buna göre  $|FB|$  kaç birimdir?



$$m(\hat{MTB}) = 90^\circ$$

$$|FB| = 25 - 15 = 10 \text{ br}$$

- 6) MTB bir üçgen ,  
 $[MD] \perp [DB]$  ,  
 $|ZB|=|TZ|$  ,  $[MD]$   
 açıortay,  
 $2 \cdot |MT|=3 \cdot |MB|=48$   
 cm ise  $|DZ|$  kaç birimdir?



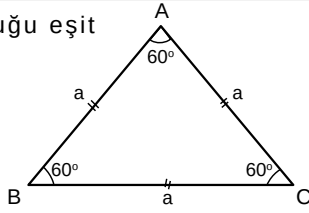
$$DZ \text{ orta taban } |DZ| = \frac{8}{2} = 4$$

## ÜÇGENLER-7

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

### EŞKENAR ÜÇGEN

Üç kenar uzunluğu eşit olan üçgendir.



$$m(\widehat{A})=m(\widehat{B})=m(\widehat{C})=60^\circ$$

Yükseklikler, iç açıortaylar ve kenarortaylar eşittir

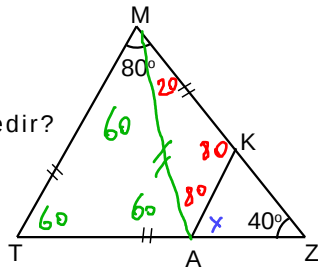
$$h_a=h_b=h_c=V_a=V_b=V_c=n_A=n_B=n_C=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ç}(ABC)=3a$$

$$A(ABC)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

### Örnek...1 :

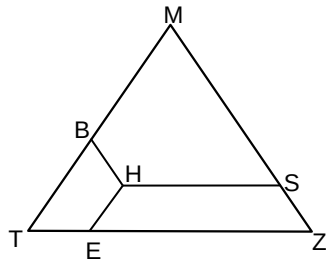
MTZ bir üçgen,  
 $m(\widehat{M})=2 \cdot m(\widehat{Z})=80^\circ$ ,  
 $|MT|=|MK|=|AT|$  ise  
 $m(\widehat{KAZ})$  kaç derecedir?



$$x+140=180$$

$$x=40^\circ$$

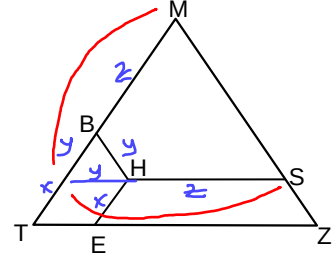
MTZ eşkenar üçgen, H üçgenin iç bölgesinde alınan rastgele bir nokta ve ve  $[HS] \parallel [TZ]$ ,  $[HB] \parallel [MZ]$ ,  $[HE] \parallel [MT]$  ise



$$|HS|+|HE|+|HB|=|MT| \text{ olur}$$

### Örnek...2 :

MTZ bir ikizkenar üçgen  
 $|HS|+|HE|+|HB|=12$   
 br ise MTZ üçgeninin alanı kaç birim karedir?

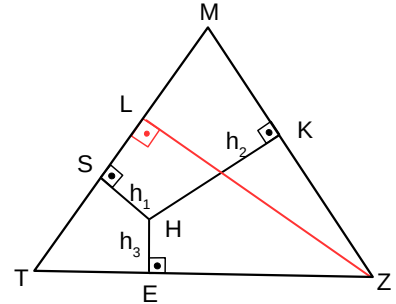


$$z+x+y=12$$

$$1 \text{ kenar } 12$$

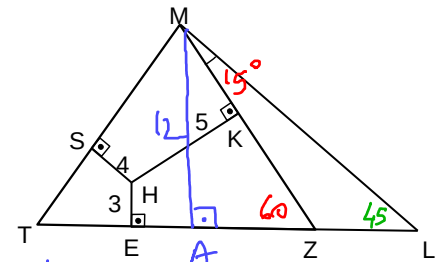
$$A = \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

MTZ eşkenar üçgen, H üçgenin iç bölgesinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$ ,  $[HE] \perp [TZ]$  ise  $h_1+h_2+h_3=h_2$  olur



### Örnek...3 :

MTZ eşkenar üçgen, H üçgenin iç bölgesinde alınan rastgele bir nokta ve  $[HS] \perp [MT]$ ,  $[HK] \perp [MZ]$ ,  $[HE] \perp [TZ]$  dir.  $m(\widehat{ZML})=15^\circ$  ise  $|ML|$  kaç birimdir?



$$|MA|=3+4+5=12 \text{ br}$$

$$|ML|=12\sqrt{2}$$

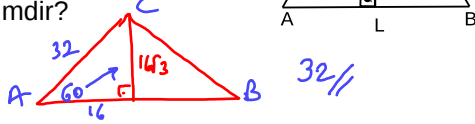
# ÜÇGENLER-7

KENAR ORTA DİKME-DİKLİK MERKEZ

## DEĞERLENDİRME - 2

- 1) ABC bir eşkenar üçgen

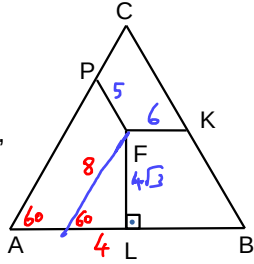
$[FP] \perp [AC]$ ,  $[FK] \perp [BC]$ ,  
 $[FL] \perp [AB]$  dir.  
 $|FP| + 3\sqrt{3} = |FK| + 2\sqrt{3} = |FL| = 7\sqrt{3}$  br  
 ise, ABC üçgeninin bir kenarı kaç birimdir?



- 2) ABC bir eşkenar üçgen

$[FP] \parallel [BC]$ ,  $[FK] \parallel [AB]$   
 $[FL] \perp [AB]$  dir  $|FP|=5$  br  
 $|FK|=6$  br  $|FL|=4\sqrt{3}$  br ise,  
 ABC üçgeninin çevresi kaç birimdir?

bir kenar  $8+5+6$   
 $G(ABC) = 3 \cdot 19$   
 $= 57$  br

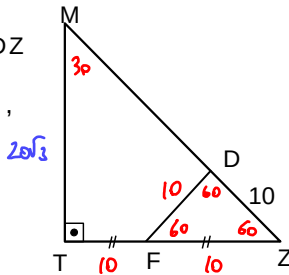


- 3) MTZ bir dik üçgen FDZ bir eşkenar üçgendir.  
 $|TF|=|FZ|$  ve  $|ZD|=10$  br,  
 $A(MTFD)$  kaç birim karedir?

$$A(MTFD) = \frac{20\sqrt{3} \cdot 20}{2} - \frac{10^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= 200\sqrt{3} - 25\sqrt{3}$$

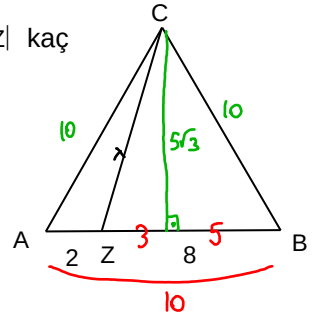
$$= 175\sqrt{3} \text{ br}^2$$



- 4) ABC bir eşkenar üçgen,  
 $|AZ|=|ZB|=8$  br, ise  $|CZ|$  kaç birimdir?

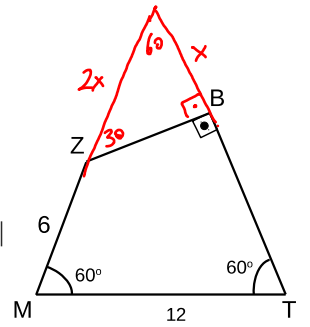
$$x^2 = 5\sqrt{3}^2 + 3^2$$

$$x = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$



- 5) MTBZ bir dörtgendir.

$m(\hat{B})=90^\circ$ ,  
 $m(\hat{M})=m(\hat{T})=60^\circ$   
 $|MZ|=|MT|=12$  br ise  $|TB|$  kaç birimdir?  
 $2x+6=12 \rightarrow x=3$   
 $|TB|=12-3=9$  br



- 6) ABC bir eşkenar üçgen

$[FP] \perp [AC]$ ,  $[FK] \perp [BC]$   
 $[FL] \perp [AB]$  dir.  
 $|FP|+|FK|=6\sqrt{3}$ ,  $|FL|=2\sqrt{3}$  br  
 ise, ABC üçgeninin alanı kaç birim karedir?

$$A(ABC) = \frac{4\sqrt{3} \cdot 8}{2} = 16\sqrt{3}$$

