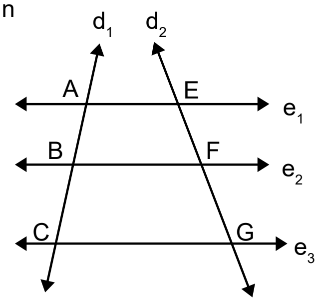
ÖZEL TEOREMLER

1. Thales Teoremi

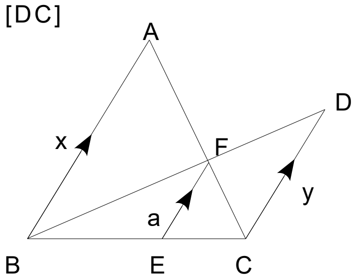
Birbirine paralel olan doğruların, herhangi iki kesen üzerinde ayırdığı karşılıklı doğru parçalarının uzunlukları orantılıdır.



Şekilde
$e_1 // e_2 // e_3$
ve buradan
$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|FG|}$

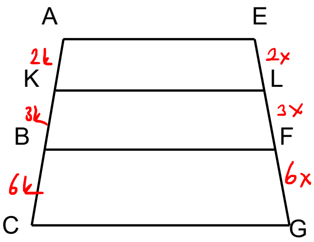
2. [AB] // [FE] // [DC]

$\frac{1}{a} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$



Örnek...1 :

Şekildeki [AE]//[KL]//[BF]//[CG] ,
$3.|EL| = 2.|LF| = |FG|$
$|AB| + |KC| = 70$ br
olduğuna göre ,
|AC|
kaç birimdir?

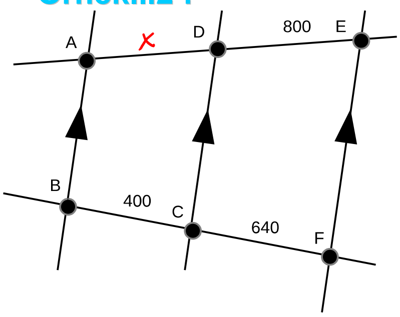


paralellikten $|AK| = 2k$ $|KB| = 3k$ $|BC| = 6k$

$5k + 9k = 70 \Rightarrow 14k = 70$ $k = 5$

$|AC| = 11k = 55$ br

Örnek...2 :



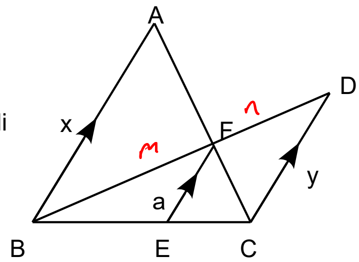
Şekildeki krokide AB CD ve EF yolları paraleldir.|BC|=400 km, |CF|=640km ve |DE|=800 km olduğuna göre A ve D şehirleri arası mesafe kaç kilometredir?

$\frac{x}{800} = \frac{400}{640}$ (Tales)

$x = 2000 = 2$ km

Örnek...1 :

Şekilde [AB] // [FE] // [DC] olmak üzere $\frac{1}{a} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ bağıntısının geçerli olduğunu gösteriniz



$\overset{\triangle}{ABF} \sim \overset{\triangle}{CDF}$

$\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$

$\overset{\triangle}{BEF} \sim \overset{\triangle}{BCD}$

$\frac{m}{m+n} = \frac{a}{y}$

$\frac{m+n}{m} = \frac{y}{a}$

$1 + \frac{n}{m} = \frac{y}{a}$

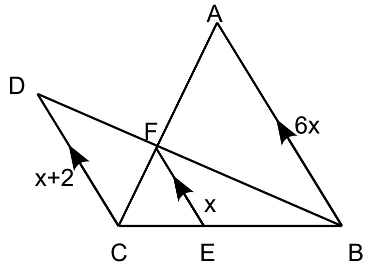
$\frac{n}{m} = \frac{y}{x} = \frac{y}{a} - 1$

$\frac{y+x}{x} = \frac{y}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{x+y}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy}$

$\frac{1}{a} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$

Örnek...2 :

Şekilde [AB] // [FE] // [DC] olduğuna göre |DC| kaç birimdir?



$\frac{1}{x} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow \underset{(6)}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x+2}$

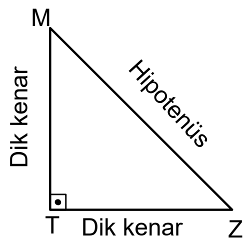
$\frac{5}{6x} = \frac{1}{x+2}$

$5x + 10 = 6x$

$x = 10$ $|DC| = x+2 = 12$ br

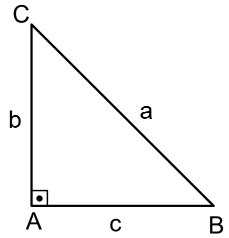
PİSAGOR BAĞINTISI

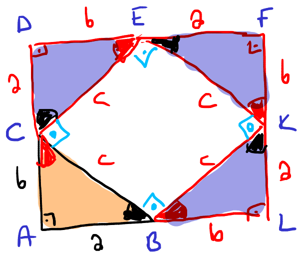
MTZ bir üçgen ve $[MT] \perp [TZ]$ ise kenarlar arasında $|TZ|^2+|MT|^2=|MZ|^2$ eşitliği geçerlidir.



Örnek...3 :

Şekilde MTZ bir dik üçgendir. Şekildeki kenarlar arasında $a^2=b^2+c^2$ bağıntısının geçerli olduğunu gösteriniz.





$A(ALFD) = (a+b)^2$

$A(ALFD) = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$

$a^2+2ab+b^2 = 2ab + c^2$

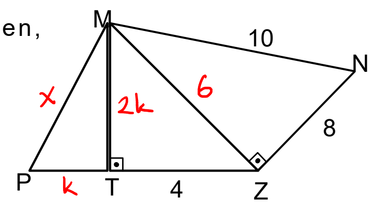
$a^2+b^2 = c^2$

$\overset{\triangle}{ABC}$ nin eşleriyle ALFD karesi oluşturuldu.

Örnek...4 :

MZN bir dik üçgen, $[MT] \perp [PZ]$, $|TZ|=4$ br, $|MN|=10$ br, $|ZN|=8$ br ve $\frac{|MT|}{|PT|}=2$ ise $|PM|$ kaç birimdir?

$\overset{\triangle}{MZN}$, 6-8-10



$|MZ| = 6 \Rightarrow 2k = \sqrt{36-16} = 2\sqrt{5}$

$k = \sqrt{5}$

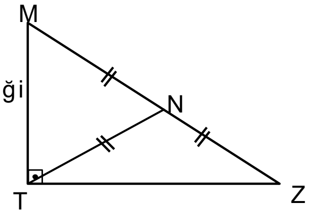
$x^2 = 4k^2+k^2$ ($\overset{\triangle}{MPT}$, pisagor)

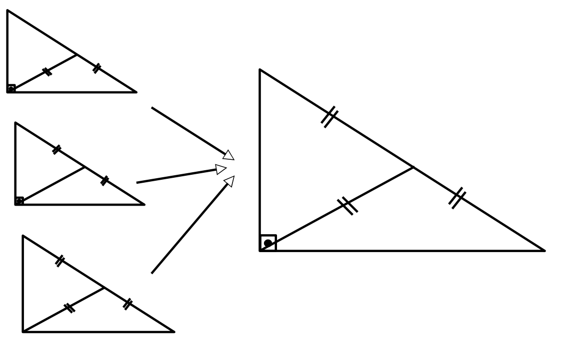
$x = k\sqrt{5}$

$x = 5$

HİPOTENÜSE AİT KENARORTAY

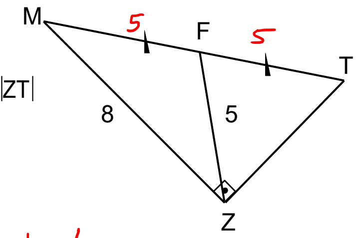
N, hipotenüsün orta noktası ise $|TN|=|MN|=|NZ|$ eşitliği geçerlidir





Örnek...5 :

MZT bir dik üçgen $|MF|=|FT|$ dir. $|MF|=5$ br, $|MZ|=8$ ise, $|ZT|$ kaç birimdir?

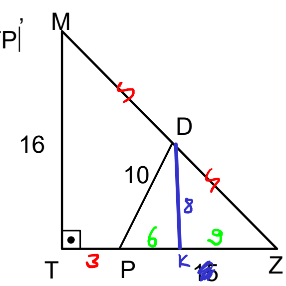


$|MF| = |FT| = |FZ|$

$\overset{\triangle}{MZT}$ özel dik üçgen $|ZT| = 6$

Örnek...6 :

MTZ bir dik üçgendir. $|MD|=|DZ|$, $|MT|=16$ br, $|PD|=10$ br, $|PZ|=15$ br $|TP|$ kaç birimdir?



$[DK] \parallel [MT]$

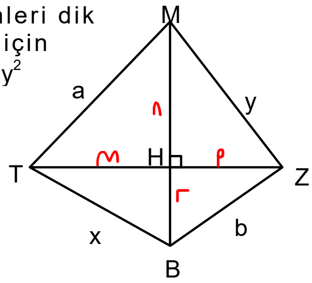
çizilirse $|DK| = \frac{|MT|}{2}$

$\overset{\triangle}{DPK}$ da $|PK| = 6$ br $\Rightarrow |KZ| = 9$

$|TP| = 9 - 6 = 3$ br

Örnek...7 :

Şekilde verilen köşegenleri dik kesişen MTBZ dörtgeni için $[MB]\perp[TZ]$ ise $a^2+b^2=x^2+y^2$ olduğunu gösteriniz.



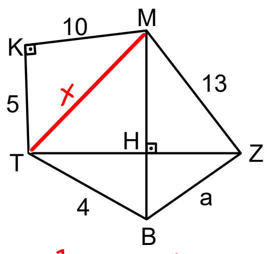
$m^2+n^2=a^2$ $\quad n^2+p^2=y^2$

$+\ r^2+p^2=b^2$ $\quad +\ m^2+r^2=x^2$

$m^2+n^2+p^2+r^2=a^2+b^2=x^2+y^2$

Örnek...8 :

$[MB]\perp[TZ]$ ve $[KT]\perp[MZ]$ verilen uzunluklara göre a kaçtır?



$x^2=10^2+5^2$

$x^2+a^2=13^2+4^2 \Rightarrow 125+a^2=169+16$

$a^2=60$

$a=2\sqrt{15}$

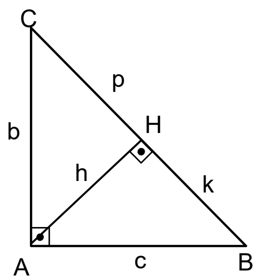
ÖKLİD TEOREMLERİ

ABC bir dik üçgen ve $[AH]\perp[BC]$, $|AH|=h, |HB|=k, |CH|=p$ ise $h^2=p.k$

$b^2=p.(k+p)$

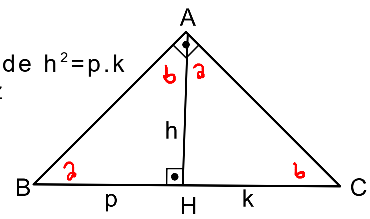
$c^2=k.(k+p)$

bağıntıları geçerlidir.



Örnek...9 :

Şekildeki dik üçgende $h^2=p.k$ olduğunu gösteriniz



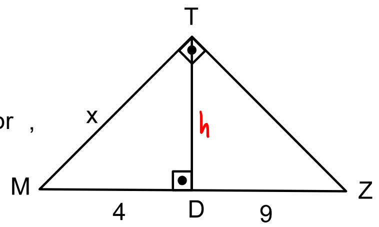
$\triangle BHA \sim \triangle AHC$

$\frac{h}{k}=\frac{p}{h} \Rightarrow h^2=p\cdot k$

Örnek...10 :

Şekilde MTZ dik üçgen $m(\widehat{T})=m(\widehat{MDT})=90°$

Şekilde $|MD|=4$, $|DZ|=9$br, olduğuna göre $|TM|=x$ kaç birimdir ?



Öklid $h^2=4\cdot 9 \Rightarrow h=6$ $\quad x^2=4^2+6^2$

$x=2\sqrt{13}$

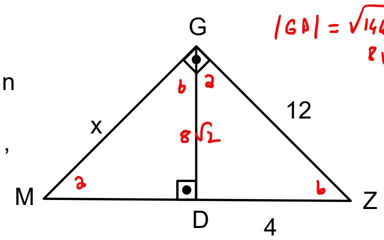
2.Yol Öklid yine kadar $x^2=4\cdot(4+9)$

$x=2\sqrt{13}$

Örnek...11 :

Şekilde MGZ dik üçgen $m(\widehat{G})=m(\widehat{MDG})=90°$

Şekilde $|GZ|=3.|DZ|=12$br, olduğuna göre $|GM|=x$ kaç birimdir ?



$|GD|=\sqrt{144-16}$

$8\sqrt{2}$

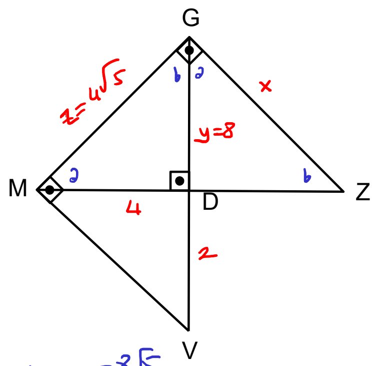
$\triangle MGZ \sim \triangle GDZ$

$\frac{x}{8\sqrt{2}}=\frac{12}{4} \Rightarrow x=24\sqrt{2}$

Örnek...12 :

Şekilde $m(\widehat{G})=m(\widehat{M})=m(\widehat{MDG})=90°$

Şekilde $|MD|=2.|DV|=4$br, ise $|GZ|$ kaç birimdir ?



$\triangle MVG$ de Öklid

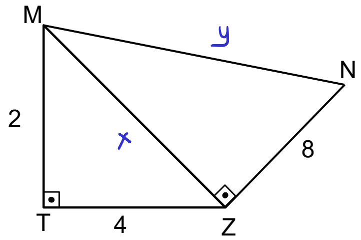
$4^2=y\cdot 2 \Rightarrow y=8$

$z^2=8^2+4^2 \Rightarrow z=4\sqrt{5}$

$\triangle MDG \sim \triangle MGZ \Rightarrow \frac{8}{x}=\frac{4}{4\sqrt{5}} \Rightarrow x=8\sqrt{5}$

DEĞERLENDİRME

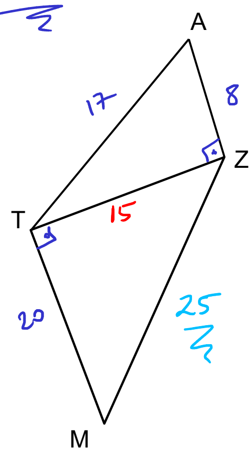
1) MTZ ve MZN birer dik üçgendir. $|MT|=2$ br, $|TZ|=4$, $|ZN|=8$ br olduğuna göre, $|MN|$ kaç birimdir?



$x^2 = 4^2 + 2^2$ $y^2 = x^2 + 8^2 = 20 + 64$

$y = 2\sqrt{21}$

2) MTZ ve ATZ birer üçgen, $[AZ]\perp[TZ]$, $[MT] \,//\, [AZ]$, $|AT| = 2.|AZ| + 1 = 17$ br, $|TM| = 20$ br. Buna göre $|MZ|$ kaç birimdir?



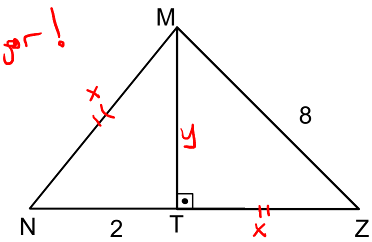
$\overset{\triangle}{ATZ}$ 8 - 15 - 17

$\overset{\triangle}{MTZ}$ 15 - 20 - 25

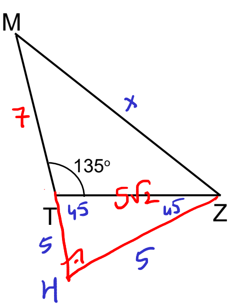
3) MNZ bir üçgen, $[NZ]\perp[TM]$, $|MN| = |TZ|$, $4.|NT| = |MZ| = 8$ cm ise $|MT|$ kaç birimdir?

$x^2 = y^2 + 2^2$
$8^2 = y^2 + x^2$ } pisagor!
$+$
$8^2 = 2y^2 + 4$

$y = \sqrt{30}$



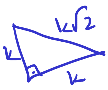
4) MTZ bir üçgen, $m(\widehat{MKZ}) = 135^\circ$. Şekilde $|MT| = 7$ br, $|TZ| = 5\sqrt{2}$ br ise $|MZ|$ kaç birimdir?



$|MZ| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

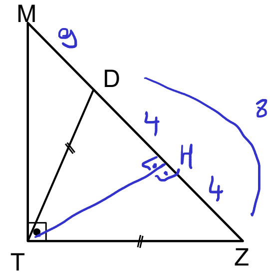
($\overset{\triangle}{MHZ}$, 5 - 12 - 13)

$\overset{\triangle}{HTZ}$ ikizkenar dik üçgen



[TH] çizilirse, TDZ ikizkenar olduğundan [MZ] ye dik olur ayrıca [TH] [DZ] nin kenarortayı olur.

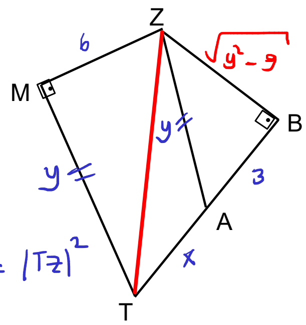
5) MTZ bir dik üçgendir. $|TD| = |TZ|$ Ve $|MD| = 9$ br, $|DZ| = 8$ br, $|TM|$ kaç birimdir?



$|TM|^2 = 13 \cdot 17$

$|TM| = \sqrt{221}$

6) MTBZ bir dörtgendir. $[TM]\perp[MZ]$, $[TB]\perp[BZ]$. $|TM| = |AZ|$, $|MZ| = 6$ br, $|AB| = 3$ br, $|AT|$ kaç birimdir?



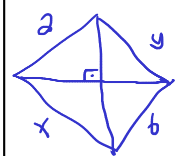
$|ZB| = \sqrt{y^2 - 9}$

$6^2 + y^2 = (x+3)^2 + \left(\sqrt{y^2-9}\right)^2 = |TZ|^2$

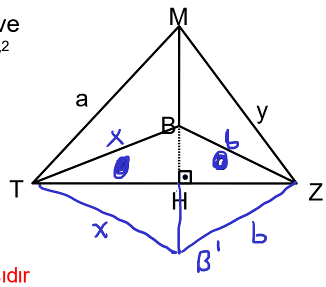
$45 = (x+3)^2$

$x = 3\sqrt{5} - 3$

7) MTBZ bir iç bükey dörtgen ve $MB\perp[TZ]$ ise $a^2+b^2=x^2+y^2$ olduğunu gösteriniz

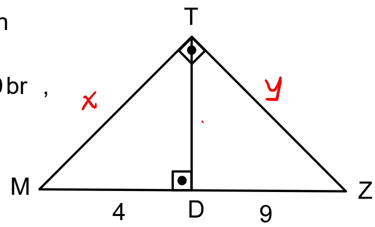


$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$



B' noktası, B nin TZ ye göre yansımasıdır

8) Şekilde MTZ dik üçgen $m(\widehat{T}) = m(\widehat{MDT}) = 90^\circ$. Şekilde $|MD| = 4$, $|DZ| = 9$ br, olduğuna göre $|TZ| - |MT|$ kaçtır?

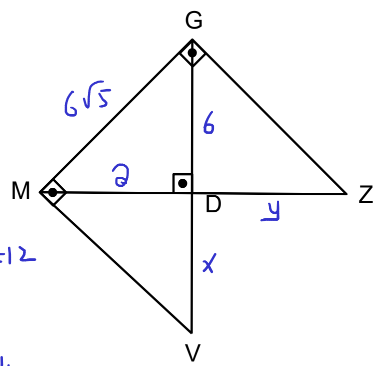


$x^2 = 4 \cdot 13 \Rightarrow x = 2\sqrt{13}$

$y^2 = 9 \cdot 13 \Rightarrow y = 3\sqrt{13}$

$3\sqrt{13} - 2\sqrt{13} = \sqrt{13}$

9) Şekilde GMV ile MGZ dik üçgenler, $m(\widehat{GDM}) = 90^\circ$, $|MG| = 6\sqrt{5}$, $|GD| = 6$ br, ise $\dfrac{|DV|}{|DZ|}$ kaç tır?



$a^2 = (6\sqrt{5})^2 - 6^2 \Rightarrow a = 12$

$6^2 = a \cdot y \Rightarrow y = 3$

$a^2 = 6 \cdot x \Rightarrow x = 24$

$\dfrac{|DV|}{|DZ|} = \dfrac{24}{3} = 8$