

REEL SAYILARDA EŞİTSİZLİK ÖZELLİKLERİ

1) a, b, c ∈ ℝ olmak üzere,

$$a < b \text{ ise } a+c < b+c, a-c < b-c$$

2) a, b, c ∈ ℝ ve c > 0 olmak üzere,

$$a < b \text{ ise } a \cdot c < b \cdot c, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

3) a, b, c ∈ ℝ ve c < 0 olmak üzere,

$$a < b \text{ ise } a \cdot c > b \cdot c, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

4) a ve b aynı işaretli olmak üzere,

$$a < b \text{ ise } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

5) 0 < a < b ise m ∈ ℤ⁺ koşuluyla a^m < b^m

6) 0 < a < b ise m ∈ ℤ⁻ koşuluyla a^m > b^m

7) a < b ve c < d ise a+c < b+d
(eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir
AMA ÇIKARILAMAZ)

8) 0 < a < 1 koşuluyla n > m ise aⁿ < a^m

Örnek...1 :

0 < x < 1 ve y > 0 koşuluyla kaç tanesi kesin doğrudur?

- | | | | |
|-------------|-----------------|---------------------|--------------------|
| i) x.y > 0 | ii) x.y > 1 | iii) x.y < 0 | iv) 0 < x.y < y |
| KESİN DOĞRU | YANLIŞ OLABİLİR | KESİN YANLIŞ (K.Y.) | KESİN DOĞRU (K.D.) |

Örnek...2 :

$\frac{a}{b} < 0$ ise hangileri kesinlikle yanlıştır ?

- | | | |
|-----------------|---------------------------|--|
| i) a.b > 0 | ii) a.b < 0 | iii) a+b > 0 |
| YANLIŞ OLABİLİR | KESİN YANLIŞ (BİRİ - İDİ) | YANLIŞ OLABİLİR |
| iv) a-b < 0 | v) 0 < a < b | vi) a ² -b ² > 0 |
| YANLIŞ OLABİLİR | KESİN YANLIŞ (BİRİ - İDİ) | YANLIŞ OLABİLİR |
- a=1, b=-1

Örnek...3 :

x² < x ise hangileri kesinlikle yanlıştır?

- | | | |
|--------------------------------|-----------|---------------------------|
| i) x > 0 | ii) x < 0 | iii) x+x ³ > 0 |
| K.Y. | K.Y. | K.Y. |
| x ² < x ⇒ 0 < x < 1 | | |

Örnek...4 :

$\frac{a}{b} > 0$ a.b.c > 0 c².b < 0

ise a, b ve c nin işaretlerini bulunuz?

$$c^2 \cdot b < 0 \Rightarrow b \rightarrow - \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow a = -$$

$$a = -, b = - \Rightarrow - \cdot - \cdot c > 0 \Rightarrow c = +$$

Örnek...5 :

x > y ve x.z < y.z ise hangileri kesin doğrudur?

- | | | | |
|--------------|-----------|----------------------------------|---------------------------------|
| i) x > 0 > y | ii) z < 0 | iii) $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$ | iv) $\frac{z}{x} < \frac{z}{y}$ |
|--------------|-----------|----------------------------------|---------------------------------|

- | | | |
|------------------------------------|---|----------------|
| v) x ² > y ² | vi) x ² z < y ² z | vii) x+z < y+z |
|------------------------------------|---|----------------|

x > y ve xz < yz ⇒ z < 0 OLMALI (YÖN DEĞİŞİMİ)

- i) Yanlı olabilir (x=1 y=0 için)
- ii) K.D
- iii) K.D (- sayıya bölünce yön değişir)
- iv) Yanlı olabilir x veya y = 0 için anlamsız
- v) Y.O. x=1 y=-2 vi) Y.O. (denkleme) vii) K.D

Örnek...6 :

x > y ve x.z < y.z ise hangileri kesin doğrudur?

- | | | |
|---------------------------------|--|----------------------------------|
| i) x > 0 > y | ii) z < 0 | iii) $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$ |
| iv) $\frac{z}{x} < \frac{z}{y}$ | v) x ² z < y ² z | |

Örnek...7 :

$\frac{1}{10} < \frac{1}{a} < \frac{2}{3}$ eşitsizliği sağlanıyorsa a nın kaç farklı tamsayı değeri vardır?

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{a} < \frac{2}{3} = \frac{1}{1.5}$$

$$10 > a \geq 1.5 \Rightarrow a = 2, 3, 4, \dots, 9$$

8 farklı değer

1. DERECE DEN EŞİTSİZLİKLER

$ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$ veya $ax+b\geq 0$ eşitsizlikleri çözümlerken aynı deklemlerde olduğu gibi x i yalnız bırakırız. Burada dikkat edilmesi gereken, eşitsizlik kurallarına uyulmasıdır. (Yön değiştirmeler, kuvvet alınması veya taraf tarafa işlemler gibi)

Örnek...1 :

$3x-2>6(2-3x)$
eşitsizliğinin çözüm kümesini sayı doğrusunda gösteriniz?

$$3x-2 > 12-18x \quad \left(\frac{2}{3}, \infty\right) = G_k$$

$$21x > 14 \quad \leftarrow \text{---} \oplus \text{---} \rightarrow$$

$$x > \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

Örnek...2 :

$\frac{2x-3}{5} < 3 - \frac{2x}{4}$
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$\frac{2x-3}{5} < \frac{12-2x}{4}$$

$$8x-12 < 60-10x$$

$$18x < 72$$

$$x < 4$$

$$G_k = (-\infty, 4)$$

Örnek...3 :

$8 < 2x+4 < 24$
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$8 < 2x+4 < 24$$

$$4 < 2x < 20$$

$$2 < x < 10$$

$$G_k = (2, 10)$$

Örnek...4 :

$3x-2 < 5x-7 < 3x+3$
eşitsizliğinin çözüm kümesini sayı doğrusunda gösteriniz?

$$3x-2 < 5x-7 \quad \text{ve} \quad 5x-7 < 3x+3$$

$$5 < 2x \quad \text{ve} \quad 2x < 10$$

$$\frac{5}{2} < x \quad \text{ve} \quad x < 5 \rightarrow \frac{5}{2} < x < 5$$

$$G_k = \left(\frac{5}{2}, 5\right) \quad \leftarrow \text{---} \oplus \text{---} \oplus \text{---} \rightarrow$$

Örnek...5 :

$3x-2 < 13 \leq 4x+21$
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$3x-2 < 13 \quad 13 \leq 4x+21$$

$$3x < 15 \quad -8 \leq 4x$$

$$x < 5 \quad \text{ve} \quad -2 \leq x$$

$$-2 \leq x < 5$$

$$\leftarrow \text{---} \oplus \text{---} \oplus \text{---} \rightarrow$$

Örnek...6 :

$2x+2$ TL ye alınan bir mal y TL ye satılıyor.
 $y=5x-160$ ise bu satıştan zarar edilmemesi için satış fiyatı en az kaç olmalıdır?

$$y = 5x - 160 \quad y \geq 2x + 2$$

$$5x - 160 \geq 2x + 2$$

$$3x \geq 162$$

$$x \geq 54 \rightarrow 5x - 160 = 5 \cdot 54 - 160$$

$$= 270 - 160$$

$$= 110$$

Örnek...7 :

$$4 - \frac{x}{2} < 3 - \frac{x-a}{4}$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-3a, \infty)$ ise a kaçtır?

$$\frac{8-x}{2} < \frac{12-x+a}{4} \Rightarrow 4 \left(\frac{8-x}{2}\right) < 12-x+a$$

$$16-2x < 12-x+a \Rightarrow 4-a < x \rightarrow G_k = (4-a, \infty)$$

$$4-a = -3a \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow \underline{\underline{a = -2}}$$

SAYILAR - 4

(BİRİNCİ DERECE DEN EŞİTSİZLİKLER)

Örnek...8 :

$\frac{2x-y}{x+y}=5$ ve $4 < 2x+3y < 16$ ise $4x+3y$ nin en büyük tamsayı değeri kaçtır?

$2x-y=5x+5y$ $3x=-6y$ $x=-2y$

$4 < 2x+3y < 16 \Rightarrow 4 < -4y+3y < 16$
 $4 < -y < 16$
 $-16 < y < -4$

$4x+3y = -8y+3y = -5y$
 $20 < -5y < 80$
 \downarrow
 $\text{maks } 79$

Örnek...9 :

$-5 < x < -2$ ve $x.y=26$ ise x artarak -2 olurken y nasıl değişir?

$x=-5$ olsa $-5y=26$ $y=-26/5$

$x=-2$ olsa $-2y=26$ $y=-13$

y azalarak -13 oluyor!

(Not $x=-5$ olmuyor çünkü 2 ve 13 değerlerin birbirine eşit olması için kullanılır!)

Örnek...10 :

a, b birer tamsayı olmak üzere $-6 < a < 7$ ve $-8 < b < 3$ ise $2a-3b$ sayısının en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?

$\text{maks } \begin{pmatrix} 2a-3b \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 6 \quad -7 \\ -5 \quad 2 \end{pmatrix} = 12+21=33$
 $\text{min } \begin{pmatrix} 2a-3b \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -5 \quad 2 \\ -10-6=-16 \end{pmatrix}$

$33 - (-16) = 49$

(Not $2, b \in \mathbb{Z}$ olmayınca direkt değer vereriz!)

Örnek...11 :

m, n birer doğal sayı olmak üzere, $-14 < m < 5$ ve $-9 < n < 21$ ise $2m-n$ sayısının en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?

$\text{maks } \begin{pmatrix} 2m-n \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \quad 0 \end{pmatrix} = 24-0=24$
 $\text{min } \begin{pmatrix} 2m-n \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 20 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 20 = -20$

$\text{maks} - \text{min} = 24 - (-20) = 44$

HATIRLATMA

$a < b$ ve $c < d$ ise $a+c < b+d$
 (eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir AMA ÇIKARILAMAZ)

Örnek...12 :

$-2 < x < 3$ ve $-4 \leq y < -1$ veriliyor. Aşağıdaki ifadelerin en büyük ve en küçük tamsayı değerlerini bulunuz?

a) $x+y$ $-2 < x < 3$ $\text{maks } = 1$
 $-4 \leq y < -1$ $\text{min } = -5$
 $\begin{matrix} -2 < x < 3 \\ + & -4 \leq y < -1 \\ \hline -6 < x+y < 2 \end{matrix}$

b) $4x+3y$ $-8 < 4x < 12$ $\text{maks } 8$
 $-12 \leq 3y < -3$ $\text{min } -19$
 $\begin{matrix} -8 < 4x < 12 \\ + & -12 \leq 3y < -3 \\ \hline -20 < 4x+3y < 9 \end{matrix}$

c) $5x-3y$ $-10 < 5x < 15$ $\text{maks } 26$
 $3 < -3y \leq 12$ $\text{min } -6$
 $\begin{matrix} -10 < 5x < 15 \\ + & 3 < -3y \leq 12 \\ \hline -7 < 5x-3y < 27 \end{matrix}$

d) x^2 $0 \leq x^2 < 9 \rightarrow x^2$ en az $x=0$ için 0 olur.
 0'ı ve üstünü için, 9'ı şurda değeriz

e) y^2 $1 < y^2 \leq 16 \rightarrow y=0$ olmuyor
 0 yok 2
 sınırların karelerini kıluru z,

f) x^3 $-8 < x^3 < 27$ ($x^{\text{tek}} < 0$ olabilir)

g) $x \cdot y$ $-12 < x \cdot y < 8$ (Tüm sayıların tek tek çarpılarak deneye!)

h) $x^2+4x \rightarrow (x+2)^2$ ile elde edilir
 $-2 < x < 3 \Rightarrow 0 < x+2 < 5 \Rightarrow 0 < (x+2)^2 < 25$

i) $y^2-2y \rightarrow (y-1)^2$ den elde edilir.
 $-4 \leq y < -1 \Rightarrow -5 \leq (y-1) < -2$
 $4 < (y-1)^2 \leq 25 \Rightarrow 4 < y^2-2y+1 \leq 25$
 $0 < x^2+4x+4 < 25$
 $-4 < x^2+4x < 21$
 $\text{en az } -3$
 $\text{en çok } 20$

$3 < y^2-2y \leq 24$ 214
 $\text{en az } 4$
 $\text{en çok } 24$

SAYILAR - 4

(BİRİNCİ DERECE DEN EŞİTSİZLİKLER)

Örnek...13 :

$-3 < x < 6$ ve $-7 < y < 4$ ise $x \cdot y$ değerinin en büyük tamsayı değeri ile en küçük tamsayı değerleri arasındaki fark kaçtır?

$$-42 < x \cdot y < 24 \rightarrow \text{tümünleri tek tek den$$

$$x \cdot y_{\text{maks}} = 23$$

$$x \cdot y_{\text{min}} = -41$$

$$23 - (-41) = 64$$

Örnek...14 :

$-3 < x < 4$ ve $-2 < y < 5$ ise $x^3 - 3 \cdot y^2$ değerinin en büyük tamsayı değeri ile en küçük tamsayı değerleri arasındaki fark kaçtır?

$$\begin{aligned} -3 < x < 4 &\Rightarrow -27 < x^3 < 64 \\ -2 < y < 5 &\Rightarrow 0 \leq y^2 < 25 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{toplayalım}$$

$$-75 < -3y^2 \leq 0$$

$$-102 < x^3 - 3y^2 < 64$$

$$\text{maks} = 63 \quad \text{min} = -101$$

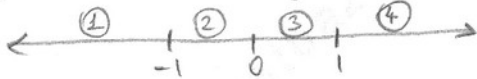
$$63 - (-101) = 164$$

Örnek...15 :

$a^2 < a$ ise a sayısı hangi aralıktadır?

$$a^2 < a \Rightarrow 0 < a < 1$$

4 kritik analığı tek tek incelenir



$$a < -1 \rightarrow \text{saglanmaz} (a = -2)$$

$$-1 < a < 0 \rightarrow \text{saglanmaz} (a = -1/2)$$

$$0 < a < 1 \rightarrow \text{saglanır} (a = 1/2)$$

$$a > 1 \rightarrow \text{saglanmaz} (a = 2)$$

Örnek...16 :

$a < a^3 < a^2$ ise a sayısı hangi aralıktadır?

4 kritik analığı bakalım



$$a < -1 \Rightarrow \text{saglanmaz} (a = -10)$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow \text{saglanır} (a = -1/2)$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \text{saglanmaz} (a = 1/2)$$

$$a > 1 \Rightarrow \text{saglanmaz} (a = 3)$$

Örnek...17 :

$19^{x-2} < 400$ eşitsizliğinin çözüm kümesini tamsayılar kümesinde bulunuz

$$19^2 = 361 \quad \text{ve}$$

$$19^3 > 400$$

$x-2$ en çok 2 dir.

x en çok 4 dir.

$$G_k = \{ \dots, -1, 0, 1, \dots, 4 \}$$

