

DOĞRUSAL FONKSİYON

$h(x) = ax + b$ biçimindeki fonksiyona doğrusal fonksiyon denir. Bu fonksiyonların grafikleri düzlemde bir doğrudur.

$y=ax+b$ ifadesinde x in katsayısı a ya eğim denir. $x=0$ $y=b$ olacağından grafik y eksenini $(0,b)$ noktasında keser

Doğrusal fonksiyonlar $f(x)=x$ referans fonksiyonundan elde edilebilir.

Genel olarak $g(x)=a.f(x+r)+k$ ($a \neq 0$) şeklindeki doğrusal fonksiyonların grafiklerini, çeşitli dönüşümler ve simetriler yardımıyla $f(x)=x$ fonksiyonundan elde edebiliriz.

Örnek...1 :

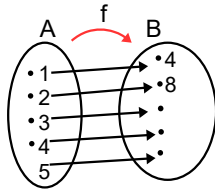
Bir karenin kenar uzunluğu ve çevresi arasındaki ilişkiyi tanımlayınız.

Aşağıdaki tabloda kare kenarının değişen bazı değerleri için o karenin çevresi hesaplanmıştır. Tabloda ve şemadaki eksikleri tamamlayınız.

Kenar	1	2	3	4	5
Çevre	4	8	—	—	—

Buradaki ilişkiyi şema ile gösterirsek

Verilen bu şemaya göre,



i) Bağımlı ve bağımsız değişkenleri yazıp, bu eşlemeyi fonksiyon biçiminde belirtiniz.

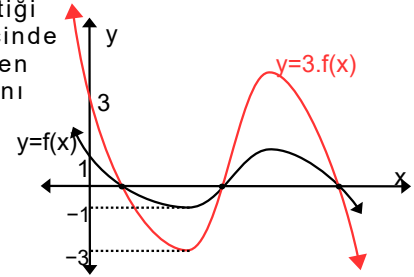
ii) Bulduğunuz fonksiyonun tanım kümesini Gerçek sayılar kümesi olarak alarak grafiğini $f(x)=x$ fonksiyonunun grafiği ile aynı koordinat sisteminde çizerek (nitel özelliklerini) karşılaştırınız.

 $y=f(x)$ verildiğinde $y=a.f(x)$ çizimi

Eğer (x, y) noktası $y=f(x)$ üzerinde bir noktaysa $y=a.f(x)$ fonksiyonu $(x, a.y)$ noktasını grafiğinde bulunduracaktır. Bu ise aşağıdaki özel durumları oluşturur.

Durum1 $a>1$

$y=f(x)$ verildiğinde $a>1$ koşuluyla verilen $y=a.f(x)$ fonksiyonu $y=f(x)$ fonksiyonunun dikey gerilmişi (genişletilmiş—uzatılmışıdır). (Şeklin eksenini kestiği nokta haricinde x ekseninden uzaklaştığını fark ediniz)



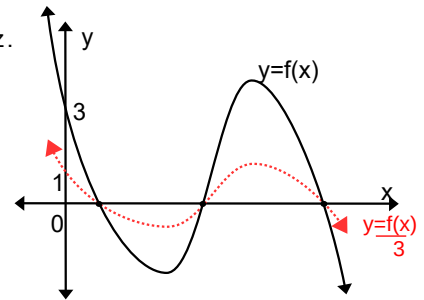
$3.f(x)$ fonksiyonu çizilirken İlk şekildeki ordinat değerleri 3 katları ile değişmiştir.

Durum 2 $0<a<1$

$y=f(x)$ verildiğinde $0<a<1$ koşuluyla verilen $y=a.f(x)$ fonksiyonu $y=f(x)$ fonksiyonunun dikey daraltılmışıdır. (Şeklin x eksenine yaklaştığını fark ediniz.)

Örneğin, $y=f(x)$ in grafiğinden yararlanıp $y=\frac{1}{3}.f(x)$ in grafiğini çizelim.

Şekli inceleyiniz.



Genel olarak $a>0$ için $y=f(x)$ grafiğinden $y=a.f(x)$ elde edilirken fonksiyonun sıfırı (x eksenini kesim noktası), tanım kümesi, işareti, artanlık—azalanlığı bire birliği değişmeyen nitelikleridir. Fonksiyonun y eksenini kestiği nokta, görüntü kümesi, maksimum ve minimum noktaları fonksiyonuna göre (ya da duruma göre) *değişebilir* niteliklerdir. (Bu niteliklerin mutlaka değişmesi gerekmez, değiştiği ve değişmediği örnekler verilebilir, genelleme yapmak doğru olmaz.) $a<0$ durumunu sonra inceleyeceğiz.

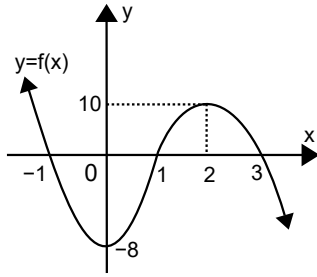
Örnek...2 :

şekilde verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için

a) $2 \cdot f(x)$

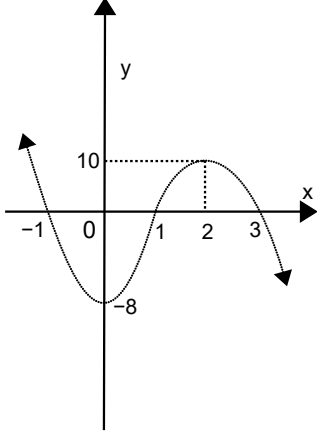
b) $\frac{1}{2} \cdot f(x)$

fonksiyonlarını çiziniz

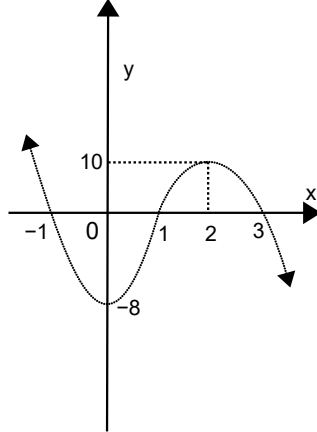


çözüm

a)



b)

**Örnek...3 :**

$f(x)=x$ $g(x)=3x$ $h(x)=\frac{1}{2}x$ fonksiyonlarını

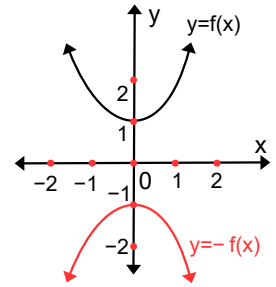
aynı koordinat düzleminde çiziniz, fonksiyonların nitel özelliklerini belirtiniz.

 $y=f(x)$ verildiğinde $y=-f(x)$ çizimi

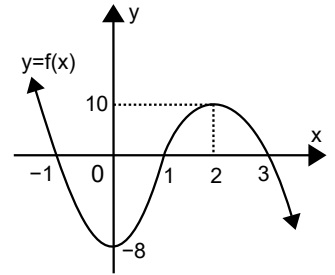
Eğer (x, y) noktası $y=f(x)$ üzerinde bir noktaysa, $y=-f(x)$ fonksiyonunda bulunan $(x, -y)$ noktası bu noktanın x eksenine göre simetriği olacağından aşağıdaki özel durum oluşur.

$y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde, $y=-f(x)$ fonksiyonunu çizmek için $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği O_x eksenine göre simetriği alınır. (grafiği x eksenine göre katlarız)

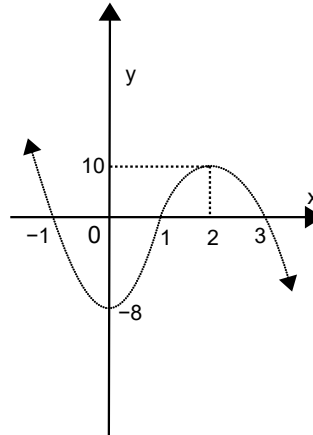
Şekli inceleyiniz

**Örnek...4 :**

şekilde verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için $y=-f(x)$ fonksiyonunu çiziniz



Çözüm

**Örnek...5 :**

$f(x)=x$ fonksiyonunu kullanarak $g(x)=-f(x)=-x$ fonksiyonunu çiziniz.

Genel olarak $g(x)=a.f(x)$ ($a<0$) fonksiyonu çizilirken

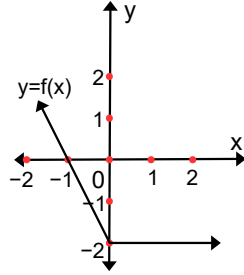
Adım1. $|a|f(x)$ fonksiyonu çizilir (genişletme/daraltma)

Adım 2 birinci adımda çizilen fonksiyonun x eksenine göre simetriği alınır.
(Alternatif olarak önce simetri alıp sonra $|a|$ sayısı ile genişletme/daraltma uygulanabilir.)

Örnek...6 :

Şekilde $y=f(x)$ grafiği verilmiştir. Buna göre

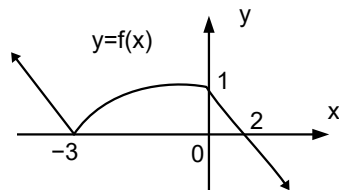
- i) $y=-f(x)$
- ii) $y=-2f(x)$ grafiklerini çiziniz.



çözüm

Örnek...7 :

Şekilde $y=f(x)$ grafiği verilmiştir. Buna göre, $y=-4f(x)$ fonksiyonunu çiziniz.



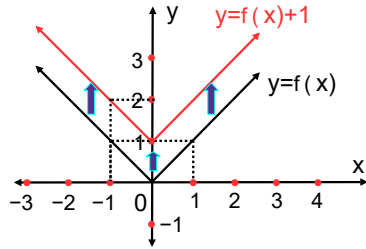
Örnek...8 :

$$g(x)=-5x \quad h(x)= -\frac{2}{3}x \text{ fonksiyonlarını}$$

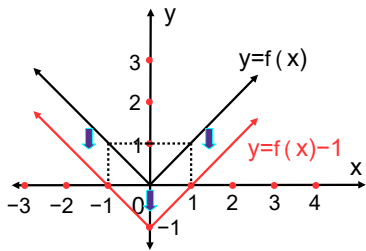
$f(x)=x$ fonksiyonunun katı olarak yazınız, aynı koordinat düzleminde çizip, fonksiyonların nitel özelliklerini belirtiniz.

$y=f(x)$ verildiğinde $y=f(x)+k$ çizimi

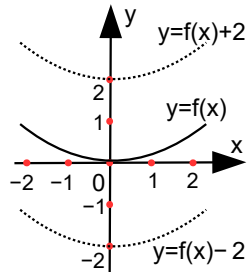
a) $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y=f(x)+k$ fonksiyonunu çizmek için $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği O_y ekseninde k birim **yukarı** yönde ötelenir. (x,y) noktası $(x,y+k)$ ya dönüşür



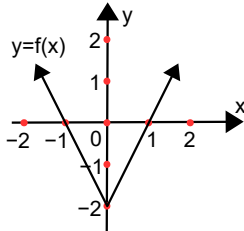
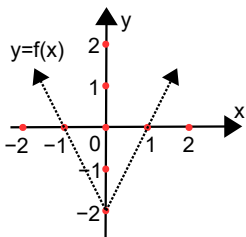
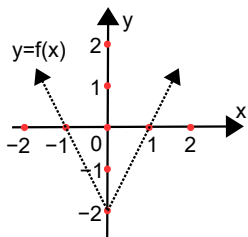
b) $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y=f(x)-k$ fonksiyonunu çizmek için $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği O_y ekseninde k birim **aşağı** yönde ötelenir. (x,y) noktası $(x,y-k)$ ya dönüşür

**Örnek...9 :**

Yandaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonu için $y=f(x)+2$ ve $y=f(x)-2$ fonksiyonları çizilmiştir. İnceleyiniz.

**Örnek...10 :**

$y=f(x)$ veriliyor. Buna göre, şıklarda verilen ifadelerin grafiklerini çiziniz?

a) $y=f(x)+1$ b) $y=f(x)-4$ **Örnek...11 :**

$g(x)=x+4$ fonksiyonunu $f(x)=x$ fonksiyonuna bağlı olarak yazınız, aynı koordinat düzleminde çizip, fonksiyonların nitel özelliklerini belirtiniz.

Örnek...12 :

$k(x)=x-3$ fonksiyonunu $f(x)=x$ fonksiyonuna bağlı olarak yazınız, aynı koordinat düzleminde çizip, fonksiyonların nitel özelliklerini belirtiniz.

Örnek...13 :

Başlangıçta içinde 50 ml su bulunan a sürahisi ve içi boş olan b sürahilerine sabit ve dakikada 100 ml su akıtan bir çeşmeden su dolduruluyor. Sürahilerin kapasiteleri eşit ve 400ml olduğuna göre sürahilerdeki su miktarının zamana göre değişimini ifade eden birer fonksiyon yazıp grafiklerini çiziniz.

$f(x)=c$ BİÇİMİNDEKİ FONKSİYONLAR

$f: A \rightarrow B$ $f(x)=ax+b$ ($a=0$) fonksiyonu için $f(A)$ görüntü kümesi tek elemanlı olacağından f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Yani Her $x \in A$ ve $b \in B$ için $f(x) = b$ ise f sabit fonksiyondur.

Sabit fonksiyonların grafikleri x eksenine paralel (dolayısıyla y eksenine dik olan) bir doğrudur.

Örnek...14 :

$A = \{-1, 0, 2, 3\}$ ve $B = \{3\}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu nasıl bir fonksiyondur? Şemasını çiziniz.

Örnek...15 :

$f(x)=5$ fonksiyonu için tabloyu doldurup noktaları koordinat sisteminde çizerek grafiğini inceleyelim.

x	-2	3	5
y			

 $f(x)=ax+b$ ŞEKLİNDEKİ FONKSİYONLAR

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$) fonksiyonunun grafiği dik koordinat sisteminde $y=ax+b$ doğrusunun grafiğini belirtir. Bu doğrunun grafiğini çizmek için iki farklı şekilde düşünebiliriz .

$g(x)=ax+b$ fonksiyonunun grafiğini çizerken

1.yol $f(x)=x$ fonksiyonu ile başlayıp dönüşümleri kullanmak (istenen $a.f(x)+b$ olduğundan)

Dönüşüm adımıyla yaparken

Adım 1 $h(x)=a.f(x)$ çizilir. (dikey daraltma—genişletme)

Adım 2 $g(x)=h(x)+b$ çizilir. (düşeyde yukarı ya da aşağı öteleme)
(Yani özetle sırasıyla $x \rightarrow ax \rightarrow ax+b$)

2.yol

Doğrunun geçtiği en az 2 noktaya ihtiyaç vardır. $y=ax+b$ denklemini sağlayan en az 2 tane farklı sıralı ikili seçilip bu sıralı ikililer dik koordinat sisteminde işaretlenir ve işaretlenen noktalar bir doğru oluşturacak şekilde birleştirilip doğru çizilir.

Örnek...16 :

$f(x)=3x+2$ fonksiyonunun grafiğini iki ayrı yolla çiziniz.

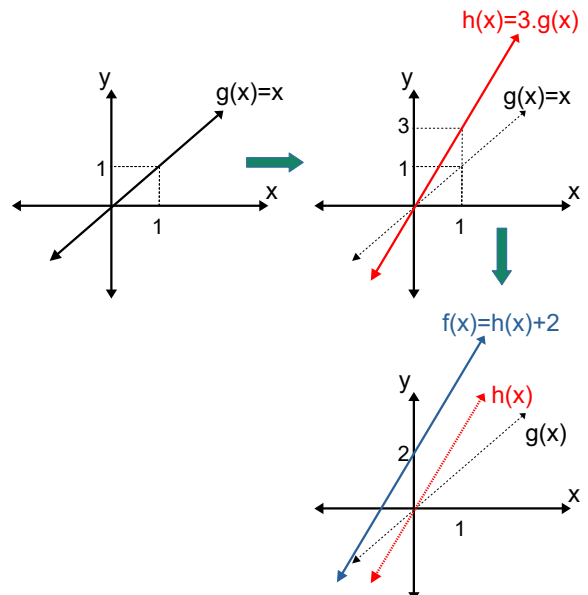
Çözüm 1

Dönüşümler Yoluyla

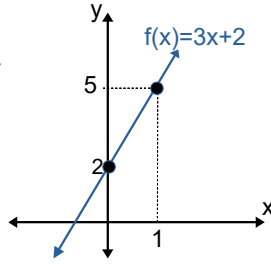
$f(x)=3x+2$ fonksiyonu için önce $g(x)=x$ fonksiyonundan başlayıp **ilk adımda** $h(x)=3g(x)$ çizilir. Bunun için $g(x)=x$ fonksiyonunun grafiği x ekseninden uzaklaştırılarak (dikeyde gerilimişi, ordinatlar 3 katına çıkıyor) çizilir.

İkinci adımda $f(x)=h(x)+2$ ile birinci adımda elde ettiğimiz fonksiyonu 2 birim yukarı kaydırarak çizimi tamamlayalım.

Kısaca $x \rightarrow 3x \rightarrow 3x+2$ çizimleri yapılır. İnceleyiniz.



Çözüm 2 $y=3x+2$ fonksiyonun grafiği bir doğru olduğundan grafiği çizmek için , doğru üzerinde iki farklı noktayı işaretleyip bu noktalardan geçen düz bir çizgi ile şekli tamamlayalım. Bunun için değişkenlerden birine değer verip diğerini $y=3x+2$ ifadesinden hesaplayalım
 $x=0 \rightarrow y=2$ (0,2) grafik üzerindedir.
 $x=1 \rightarrow y=5$ (1,5) grafik üzerindedir.
 Yandaki şekli inceleyiniz.



Örnek...17 :

$f(x)=5x-3$ fonksiyonunun grafiğini iki ayrı yolla çiziniz.

Örnek...18 :

$f(x)=-7x+3$ fonksiyonunun grafiğini iki ayrı yolla çiziniz. Fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.

Örnek...19 :

$f(x)=\frac{-x}{2}+5$ fonksiyonunun grafiğini dönüşümler yolla çiziniz. Fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.

Örnek...20 :

$f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$) fonksiyonunun her $a > 0$ için artan olduğunu ispatlayınız.

Örnek...21 :

$f(x)=ax+b$ fonksiyonunun her a ($a \neq 0$) için birebir olduğunu ispatlayınız.

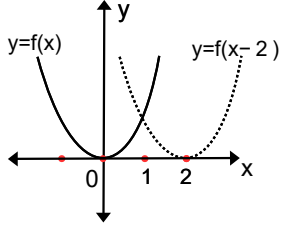
$f(x)=a(x\pm r)\pm k$ ŞEKLİNDEKİ FONKSİYONLAR

Bir fonksiyondaki x yerine $x+r$ ya da $x-r$ yazılmasıyla elde edilen fonksiyon ilk fonksiyonun yatay ekseninde ötelenmişini (kaydırılmışını) verir. Şimdi bu hareketlere detaylıca bakalım.

X EKSENİNDE ÖTELEMELER

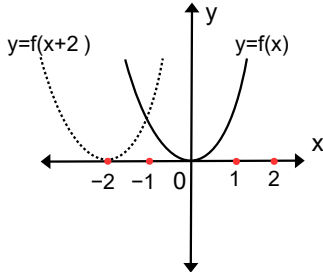
a) $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y=f(x-r)$ fonksiyonunu çizmek için $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği O_x ekseninde r birim sağ yönde ötelenir. Bunun sebebi (a,b) noktası $y=f(x)$ üzerinde ise $(a+r,b)$ $f(x-r)$ fonksiyonu üzerinde olmaktadır.

Şekilde $f(x)$ ve $f(x-2)$ fonksiyonları verilmiştir. İnceleyiniz



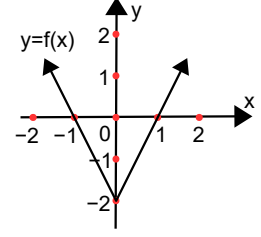
b) $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y=f(x+r)$ fonksiyonunu çizmek için $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği O_x ekseninde r birim sol yönde ötelenir. Bunun sebebi (a,b) noktası $y=f(x)$ üzerinde ise $(a-r,b)$ $f(x+r)$ fonksiyonu üzerinde olmaktadır.

Şekilde $f(x)$ ve $f(x+2)$ fonksiyonları verilmiştir. İnceleyiniz

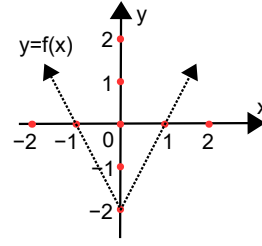


Örnek...22 :

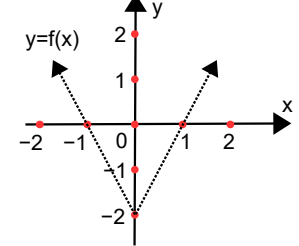
$y=f(x)$ veriliyor. Buna göre, şıklarda verilen ifadelerin grafiklerini çiziniz?



a) $y=f(x+1)$



b) $y=f(x-2)$



Örnek...23 :

$f(x)=x$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki fonksiyonları çiziniz

a) $g(x)=f(x+5)$

b) $h(x)=f(x-3)$

$f(x)=a(x+r)+k$ biçimindeki fonksiyonları
 $y=x$ referans fonksiyonundan çizerken

Adım 1 $y=x$ r birim sola ($r<0$ için sağa) ötelenir(kaydırılır).

Adım 2 bir önceki adımda elde edilen fonksiyona a çarpanına göre daraltma genişletme uygulanır

Adım 3 bir önceki adımda elde edilen fonksiyon k birim yukarı ($k < 0$ için aşağı) ötelenir (kaydırılır).

Burada uygulanacak dönüşümler sırasıyla r,a,k harfleri sırlamasıyla uygulanır.

Örnek...24 :

$f(x)=4(x+2)-7$ fonksiyonunun grafiğini $y=x$ referans fonksiyonu ile çiziniz

Çözüm

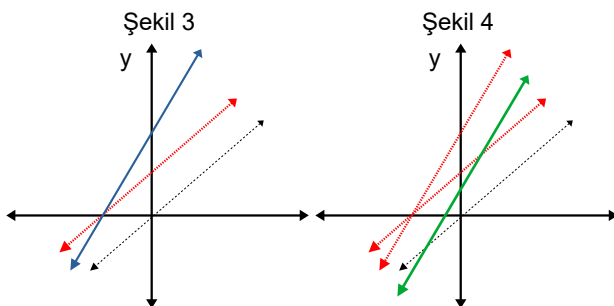
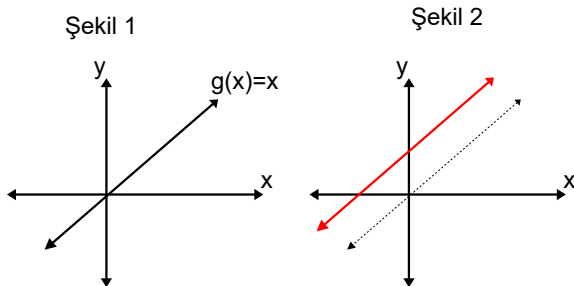
istenen fonksiyon $y=g(x)=x$ düşünülüğünde
 $4.g(x+2)-7$ olacağından

adım1 $y=x$ grafiği 2 birim sola kayar (x yerine $x+2$ gelmiş)

adım2 adım1 deki fonksiyonu 4 ile çarpacağız
(dikeyde gererek—açarak x ekseninden uzaklaştırma)

adım3 adım2 deki fonksiyon düzeyde 7 birim aşağı ötelenir.

Bu adımları çizime aktarırsak:



Yeşil grafikte çizim tamamlanmış olur.
(Not: $f(x)=4(x+2)-7$ yerine $f(x)=4x+1$ ile de çizimi yapabiliirdik)

Örnek...25 :

$f(x)=3(x+1)-2$ fonksiyonunun grafiğini $y=x$ referans fonksiyonu ile çiziniz.

Örnek...26 :

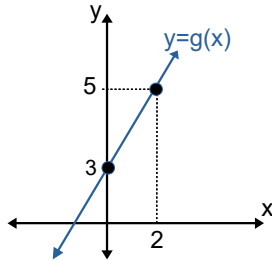
$f(x) = \frac{1}{2}(x-2) + 4$ fonksiyonunun grafiğini $y=x$ referans fonksiyonu ile çiziniz.

Örnek...27 :

Grafiği verilen fonksiyonu

a) $f(x)=x$ türünden $(f(x))$ in türünden)

b) x e bağlı cebirsel biçimde ifade ediniz.

**Çözüm**

1.yol

Grafikten eğimin 1 olduğu anlaşılır. $y=x$ deki $(3,3)$ $(0,3)$ olduğuna göre $y=x$ 3 sola kaymış dolayısıyla $g(x)=1.f(x+3)$ yazılabilir.

2.yol

fonksiyon doğrusal biçimde olduğundan $y=g(x)=ax+b$ türünde yazılabilir. $(0,3)$ ve $(2,5)$ grafik üzerinde olduğundan denklemi sağlar

$$3=a \cdot 0 + b$$

$$5=2a+b \quad \text{denklemlerini beraber çözersek}$$

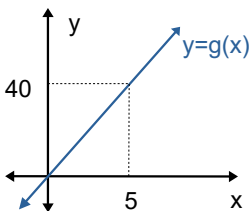
$a=1$ ve $b=3$ bulunur. Dolayısıyla önce cebirsel olarak $y=g(x)=x+3$ yazılabilir. Bu ifadeyi de istersek $g(x)=f(x)+3$ biçiminde $(f(x)=x \text{ verildiğinden dolayı})$ yazabiliriz.

b) $y=g(x)=x+3$ cebirsel eşitliğiyle ifade yazılabilir.

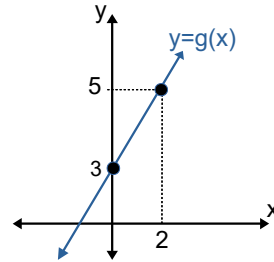
Örnek...28 :

Grafiği verilen fonksiyonları a) $f(x)=x$ türünden b) cebirsel olarak ifade ediniz.

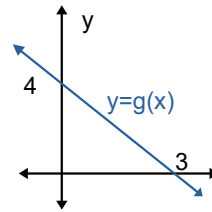
a)



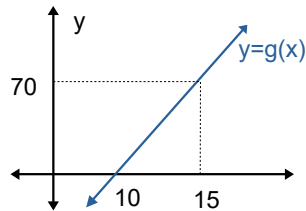
b)



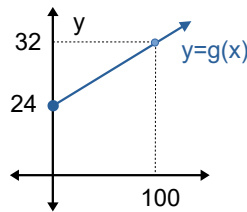
c)



d)



e)



FONKSİYONLARIN PARÇALI GÖSTERİMİ

Tanım kümesinin ayrık alt aralıklarında farklı kurallarla ifade edilen fonksiyonlara parçalı tanımlı fonksiyon denir.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}$$

Örnek...29 :

Reel sayılarda

$$f(x) = \begin{cases} 4x+2, & x < 0 \\ -x-5, & x \geq 0 \end{cases} \text{ biçiminde tanımlanan}$$

$y=f(x)$ fonksiyonu için $f(-3) + f(2)$ işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...30 :

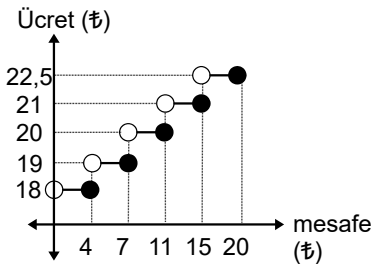
Reel sayılarda $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 2 \\ x+2 & -3 < x \leq 2 \\ -3 & x \leq -3 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyon için $f(2) - f(3)$ kaçtır?

Örnek...31 :

İstanbul içi çalışan minibüs ücretlerine yapılan yeni düzenlemeyle birlikte kat edilen mesafe ve ödenmesi gereken ücretler tablodaki gibi belirlenmiştir.

Mesafe (km)	0-4	4-7	7-11	11-15	15-20
Ücret (₺)	18	19	20	21	22,5

Ödenmesi gereken ücretin mesafeye bağlı grafiğini çizerek cebirsel biçimde temsil edelim. (Sınırlarda düşük ücretle ücret)



Grafik görüldüğü tek bir cebirsel şekilde ifade edilemez, bunun yerine gidilen mesafelere bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

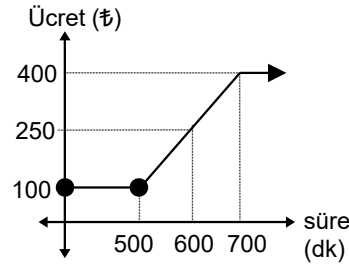
Tanım kümesi : $[0, 20]$
Görüntü kümesi : $\{18, 22,5\}$

$$f(x) = \begin{cases} 18, & 0 < x \leq 4 \\ 19, & 4 < x \leq 7 \\ 20, & 7 < x \leq 11 \\ 21, & 11 < x \leq 15 \\ 22,5 & 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

Örnek...32 :

Bir cep telefonu servis sağlayıcısının telefon konuşmalarına uyguladığı ücret tarifi, kullanılan ilk 500 dakikalık süre için aylık 100 Türk lirası sabit ücret ve her dakika fazladan süre için 1 Türk lirası olarak düzenlenmiştir. (500 dakika üzerine konuşma süresine bağlı olarak ücret doğrusal artmaktadır.) Konuşması süresi 700 dakikayı geçerse ücret daha fazla artmamaktadır. Konuşulan süreye (dk) bağlı aylık ücret (₺), aşağıda tablo ve fonksiyon grafiğiyle gösterilmiştir.

Süre (dk)	0-500	500-550	550-600	600-650	650-700	700-
Ücret (₺)	100	175	250	325	400	400



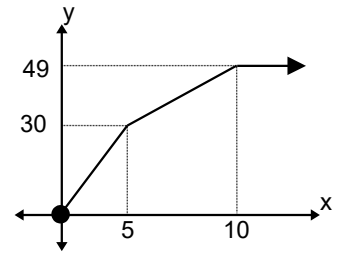
Tanım kümesi : $[0, \infty)$

Görüntü kümesi : $[100, 400]$

$$f(x) = \begin{cases} 100, & 0 \leq x < 500 \\ 100 + (x - 500) \cdot 1,5, & 500 < x \leq 700 \\ 300, & 700 < x \end{cases}$$

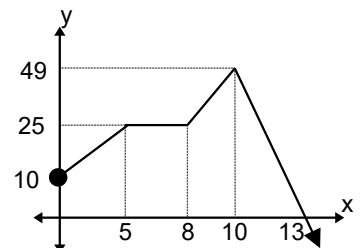
Örnek...33 :

Grafiği verilen fonksiyonu cebirsel olarak ifade ediniz. Tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz.



Örnek...34 :

Grafiği verilen fonksiyonu cebirsel olarak ifade ediniz. Tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz.



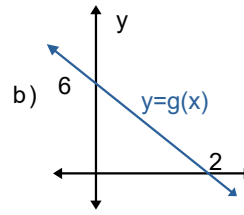
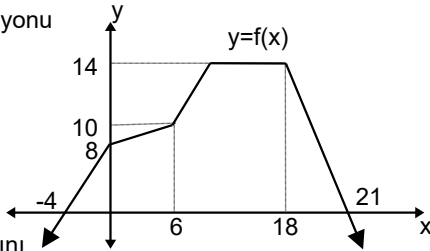
DEĞERLENDİRME

- 1) $y=f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

a) $2.f(x)$

b) $\frac{1}{2}.f(x)$

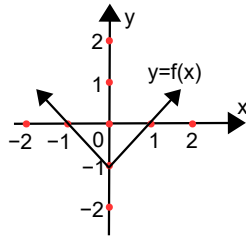
fonksiyonlarını çiziniz



- 5) $f(x)=4(x+1)-2$ fonksiyonunun grafiğini $y=x$ referans fonksiyonu ile çiziniz.

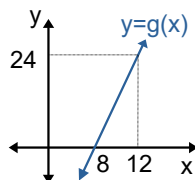
- 2)

$y=f(x)$ veriliyor. Buna göre, $y=2f(x)+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?



- 3) $f(x)=x$ $g(x)=5x$ $h(x)=-\frac{2}{5}x$ fonksiyonlarını aynı koordinat düzleminde çiziniz, fonksiyonların nitel özelliklerini belirtin

- 4) Grafikleri verilen doğruları cebirsel olarak ifade ediniz.
a)



- 6) Kalem üreten bir fabrikada günlük sabit üretim masrafları 10.000 ₺ ve üretilen her bir kalemin maliyeti 20 ₺ dir. Günlük x adet kalem üretildiğinde oluşacak maliyeti cebirsel ve grafiksel olarak ifade ediniz.

- 7) Dikildiğinde boyu 20 cm olan bir bitki ilk iki ay boyunca uzamamaktadır. Sonra her ay 4 cm uzamaktadır. Buna göre bitkinin boyunun bir senedeki değişimini grafiksel olarak ve cebirsel olarak ifade ediniz.

- 8) Grafiği verilen fonksiyonu cebirsel olarak ifade ediniz. Tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz.

