

FONKSİYON KAVRAMI

Günlük hayatta iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkilere sıklıkla rastlanmaktadır.
Örneğin, *sabit hızla hareket eden bir cismin katettiği mesafe ile zaman* doğrusal ilişki içindedir.

Genel olarak birbirine birinci dereceden bir denklemle bağlı iki değişken için doğrusal ilişkilidir denir.

x ve y birbirine doğrusal ilişkiyle bağlanmış iki değişken ise aralarında sıfırdan farklı a,b gerçekte sayıları için $ax+by+c=0$ biçiminde bir denklem yazılabilir.

Bu bölümde fonksiyon kavramını tanımlayıp, İki değişken arasında bulunan doğrusal ilişkiyi ifade eden doğrusal fonksiyonları inceleyeceğiz.

Genel olarak fonksiyon terimini, farklı olması gerekmeyen (ve boş olmayan) iki küme arasında elemanları (genellikle bir kurala göre) eşleyen bir *ilişki* olarak tanımlayabiliriz.

TANIM

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere **A'nın her bir elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye** (kurala) A dan B ye fonksiyon denir.

A dan B ye tanımlı bir f fonksiyonu

$$f:A \rightarrow B \text{ ya da } f:A \rightarrow B, y=f(x) \text{ biçiminde } x \rightarrow y=f(x)$$

gösteririz.

Fonksiyonlar genellikle f,g,h gibi harflerle temsil edilirler.

A dan B ye tanımlı f kuralının (eşlemesinin) fonksiyon olması için

i) A'daki her elemanın görüntüsü (eşleştiği bir eleman) olmalı (ya da A'da açıkta eleman kalmamalı)

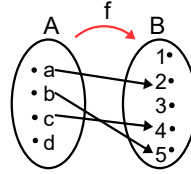
ii) A'daki her elemanın yalnız bir tane görüntüsü olmalı (A'dan bir eleman B'den sadece bir elemanla eşleşmeli)

koşulları gerçekleşmelidir.

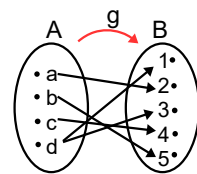
Örnek...1 :

Aşağıda A dan B ye şemaları verilen f, g, h, z eşlemelerinin fonksiyon olup olmadıklarını nedenleriyle açıklayınız?

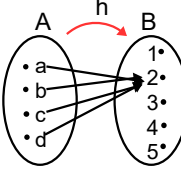
1.



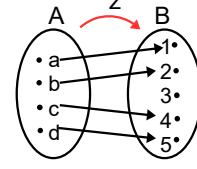
2.



3.

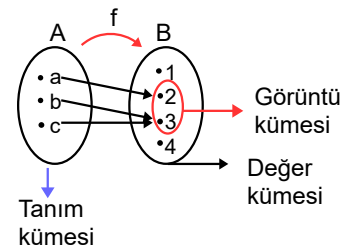


4.



TANIM, DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ

$f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun şeması



olduğuna göre,

$A = \{a, b, c\}$ kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**,

$B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesine fonksiyonun **değer kümesi** denir.

Bu fonksiyonu **liste biçiminde**

$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$ olarak da yazabiliriz.

A'daki elemanların eşleştiği B kümesinin elemanlarından oluşan kümeye **görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir.

Şu halde görüntü kümesi $f(A) = \{2, 3, 4\}$ tür

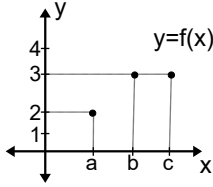
Fonksiyonun liste biçiminin koordinat düzleminde noktalar şeklinde ifade edilmesine **fonksiyonun grafiği** denir. Fonksiyonun grafiğini inceleyelim.

Grafikten herhangi bir değeri okumak için x ekseninde noktayı bulup düşey doğrultudaki ilgili noktanın y değerini söyleriz.

Mesela $f(a)$ için x ekseninde $x=a$ yı bulup dikey doğrultudaki noktanın y değerini okuyarak, y değeri (bu durumda 2) 2 olduğu için $f(a)=2$ (ya da a'nın görüntüsü 2 dir) diyoruz.

Dikey doğrultuda fonksiyonun tanım kümesi için tam olarak bir nokta olması gerektiğine dikkat ediniz.

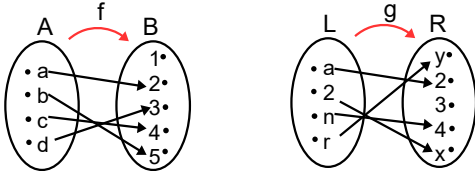
Grafik üç noktadan oluşmaktadır. $f(a)=2$, $f(b)=3$, $f(c)=3$ olduğu grafikten görülebilir.



Yukarıdaki fonksiyonun tanım kümesi sonlu sayıda elemandan oluştuğu için grafiği sonlu sayıda noktadan oluşuyor (kesikli grafik türü). Tanım kümesi sonsuz elemanlı olan kümelerde tanımlı fonksiyonların grafikleri sürekli (çizgisel—eğrisel grafik türü) biçimli olabilir. Grafik konusuna tekrar değineceğiz.

Örnek...2 :

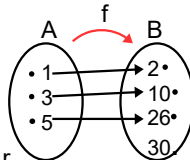
Aşağıda verilen fonksiyonların tanım (T), değer (D) ve görüntü kümelerini (G) yazınız?



T:
G:
D:

Örnek...3 :

A dan B ye f fonksiyonunun şeması yanda verilmiştir. f fonksiyonunu liste yöntemi, grafik yöntemi gösteriniz. Tanım, değer ve görüntü kümelerini yazınız. Eşlemeyi bir cebirsel biçimde (kural) yazmak istersek nasıl bir ifade yazabiliriz?



Örnek...4 :

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu "Her bir gerçekte sayıyı dört katı ile eşleştirmektedir." şeklinde tanımlanıyor. Buna göre, f doğrusal fonksiyonunu a) cebirsel olarak ifade ediniz. b) görüntü kümesini yazınız c) böyle bir fonksiyon hangi amaçla kullanılabilir ?

Örnek...5 :

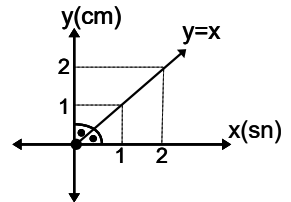
$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ifadesinin bir fonksiyon belirttiği biliniyor. $f(x) = \sqrt{x+3}$ Buna göre seçilebilecek en geniş A kümesini ve bu fonksiyonun görüntü kümesini belirtiniz.

Örnek...6 :

Başlangıçta boş olan dikdörtgenler prizması şeklindeki havuza, sabit hızlı su akıtan bir musluktan su doldukça havuzdaki suyun yüksekliği saniyede 1 cm artmaktadır.

Havuzdaki suyun yüksekliğinin, zamana (sn.) bağlı olarak yüksekliğini (cm) gösteren ilişki, uygun aralıkta $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile ifade edilebilir.

Bu ilişkide zaman **bağımsız değişken**, yükseklik **bağımlı değişken**dir. Şekli inceleyiniz.



İki değişkenden birine verilen değerlere bağlı olarak diğer değişken değişiyorsa, bu durumda ilk değişkene **bağımsız değişken**, ikinci değişkene ise **bağımlı değişken** denir.

Örnek...7 :

Tabloda aralarında doğrusal ilişki olan x bağımsız değişkeni ve $y=f(x)$ bağımlı değişkeni için bazı değerler verilmiştir.

x	-2	0	1	5
y	-5	1	4	16

a) Buna göre değişkenler arası cebirsel ifadeyi yazınız.

b) $f(0)+f(1)+f(10)$ kaçtır?

$y=x$ fonksiyonunun grafiğinden genel olarak bütün doğrusal grafikleri elde edebileceğimiz için bu fonksiyona referans fonksiyonu diyeceğiz

Sayısal sonuçlar alan fonksiyonlarda aşağıdaki özelliklere o fonksiyonun nitel özellikleri denir.

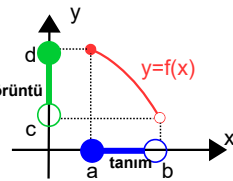
1. Tanım ve görüntü kümeleri
2. İşareti (görüntü kümesinin sıfırdan büyük ya da küçük oluşu)
3. Sıfırı (bağımsız değişkene verilen değer için bağımlı değişkenin sıfır oluşu)
4. Maksimum ve minimum noktaları (fonksiyonun görüntülerinde kendisinden daha büyük ya da daha küçük değerler olmayan sayılar)
5. Artanlık ve azalanlığı (tanım kümesindeki değerler büyüdükçe görüntülerin artması ya da azalması)
6. Bire—birliği (tanım kümesinden seçilecek farklı değerlere ait görüntülerin de farklı olup olmaması)

Tanım ve görüntü kümelerinden daha önce bahsetmiştik şimdi bir fonksiyonun grafiği ve sırasıyla diğer maddelerden bahsedelim.

BİR FONKSİYONUN GRAFİĞİ

Bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümesinin elemanlarının ikilerinin oluşturduğu noktalara fonksiyonun grafiği denir. Tanım kümesi x , görüntü kümesi elemanları y ekseninden seçilir. Fonksiyon grafikleri doğrusal olabileceği gibi eğrisel şekiller de olabilir.

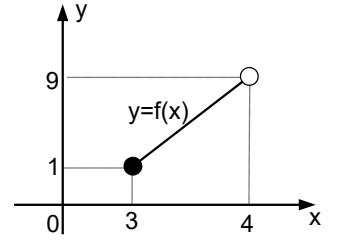
Bir fonksiyonun grafiğine bakarak hızlı bir şekilde tanım/görüntü kümeleri, fonksiyonun işareti, fonksiyonun maksimum minimum değerleri, fonksiyonun artanlık—azalanlığı, fonksiyonun bire—birliği gibi nitel özelliklerine hızlıca karar vermek mümkün olur.



Örnek...8 :

$y=f(x)$ fonksiyonu için

- a) tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz
- b) $f(3)$ kaçtır.
- c) $f(4)$ kaçtır?



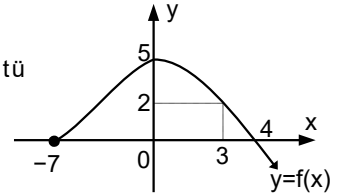
Örnek...9 :

$y=f(x)$ fonksiyonu

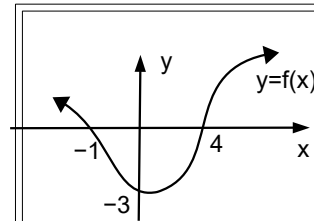
için a) tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz

b) $f(3)$ kaçtır.

c) $f(0)+f(4)$ kaçtır?



BİR FONKSİYONUN İŞARETİ



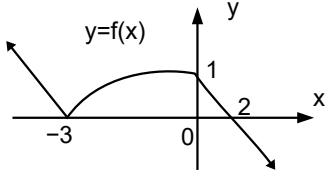
Şekilde verilen $y=f(x)$ eğrisinin tablosunu yapalım. Bunun için x eksenindeki noktalarda $y=f(x)>0$,

grafikle x ekseninin keşimi olan noktalarda $f(x)=0$ (bu fonksiyonun -1 ve 4 olmak üzere iki tane sıfırı var).

($f(x)=0$ denkleminin kökleri f nin sıfırları adını alır.)

x ekseninin altındaki kısımda da $y=f(x)<0$ olduğunu bilmek yeterlidir. Bu bilgileri tabloda (işaret) şu şekilde ifade ederiz.

x	$-\infty$	-1	4	∞
$y=f(x)$		$+$	$-$	$+$

Örnek...10 :

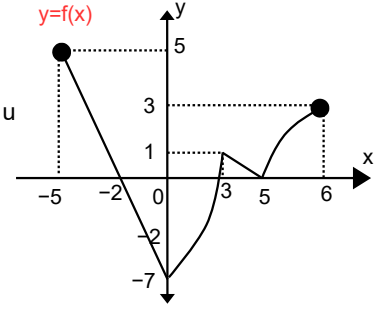
$y=f(x)$ fonksiyonunun işaret tablosunu yapınız, sıfırlarını belirtiniz.

Kısaca, artan x değerlerine karşılık gelen y değerleri de artıyorsa fonksiyon artandır denir.

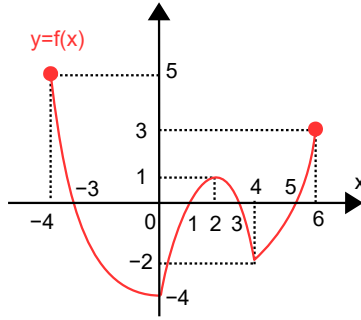
Artanlık (ya da azalanlık) bir karşılaştırma durumu olduğundan, tek bir x değeri için artanlık azalanlık yerine genel olarak bir aralıkta artanlık azalanlık incelenir.

Örnek...12 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun artan olduğu araklıkları yazınız.

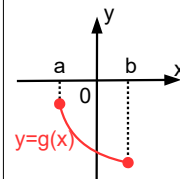
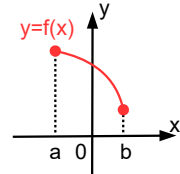
**Örnek...11 :**

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini yazınız. İşaret tablosunu yapınız, sıfırlarını belirtiniz

**AZALAN FONKSİYON**

$f:A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu B kümesinde azalan fonksiyondur denir.

$y=f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitif değerli ve azalandır.



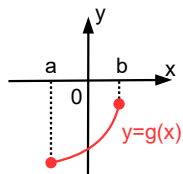
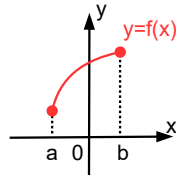
$y=g(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında negatif değerli ve azalandır.

Özet olarak artan x değerlerine karşılık gelen y değerleri azalıyorsa fonksiyon azalandır denir.

**ARTANLIK VE AZALAN FONKSİYONLAR
ARTAN FONKSİYON**

$f:A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna A kümesinde artan fonksiyon denir.

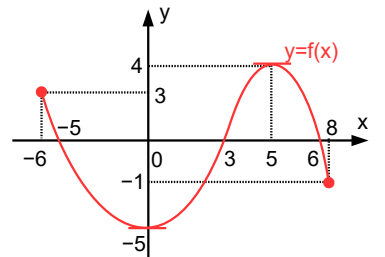
$y=f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitif artandır.



$y=g(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında negatif değerli ve artandır.

Örnek...13 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun negatif değerli ve azalan olduğu en geniş açık aralıktaki x tam sayılarının toplamı kaçtır?



FONKSİYONUN MAKSİMUM–MİNİMUM (EKSTREMUM) DEĞERLERİ

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin.

Her $x \in A$ için

$f(x) \leq f(x_0)$

olacak şekilde

bir $x_0 \in A$ sayısı

varsa $(x_0, f(x_0))$

noktasına f nin

(mutlak)

maksimum

noktası;

her $x \in A$ için

$f(x) \geq f(x_1)$ olacak şekilde bir $x_1 \in A$

sayısı varsa

$(x_1, f(x_1))$ noktasına f nin (mutlak)

minimum noktası denir. Tanım kümesinin

alt aralıklarında benzer karşılaştırmalar

kurularak yerel maksimum ya da

minimumlar da tanımlanır. Bunu

yapabilmek için maksimum ya da

minimum olacak noktayı kapsayacak

civara (noktayı içine alan herhangi bir

aralığa) bakılır.

Şekli inceleyiniz.

$y=f(x)$ fonksiyonu x_1, x_3, x_5 apsisli

noktalarda yerel maksimum değerler,

x_2, x_4, x_6 apsisli noktalarda ise yerel

minimum değerler alır.

Bu değerlere (minimum ya da

maksimum) ekstremum noktaları da

denir. **Yerel ekstremumların** birden fazla

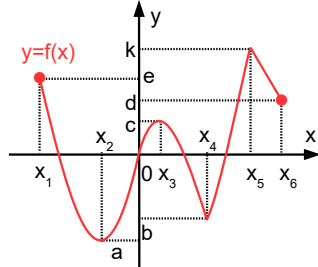
olabileceğine dikkat ediniz.

Maksimumlar içerisinde en büyüğüne

mutlak maksimum, minimumlar

içerisinde en küçüğüne **mutlak minimum**

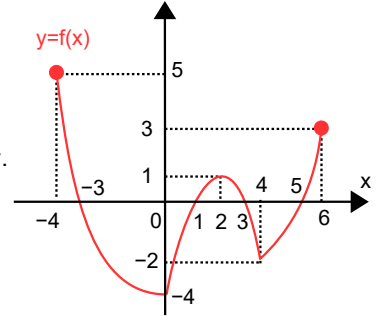
denir.



Örnek...15 :

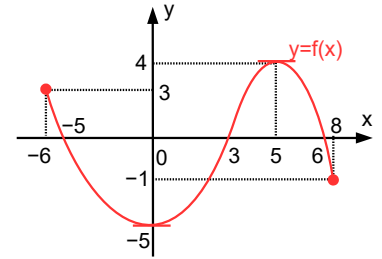
$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Bu fonksiyon için $x=-4$, $x=2$ $x=6$ apsisli noktalarda yerel maksimumlar mevcuttur. Maksimum değerler ise sırasıyla 5, 1 ve 3 olur. Fonksiyonun mutlak maksimum değeri mevcut olup bu değer 5 tir. Bu fonksiyon için $x=0$, $x=4$ apsisli noktalarda yerel minimumlara sahiptir. Minimum değerleri ise sırasıyla -4 ve -2 dir. Mutlak minimum değeri mevcut olup bu değer -4 tür.



Örnek...16 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun mutlak maksimum ve minimum değer aldığı apsislerin toplamı kaçtır?



Özet olarak grafikten maksimum ya da minimuma karar verirken civarda daha büyük ya da küçük bir değer olmamasına bakarız.

Fonksiyonların ekstremumlarına karar verirken artanlık azalanlık arasında geçişlere de dikkat ediniz.

Bir fonksiyonun tanım kümesi değiştirilirse minimum maksimum değerleri oluşabilir ya da yok olabilir.

Örnek...14 :

Şekilde tanım kümesi $[5,9]$

olan $y=x$ fonksiyonu

verilmiştir. Bu fonksiyon $x=5$

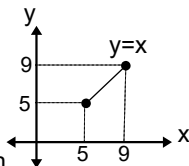
için minimum değerini alır.

Fonksiyonun minimum noktası

$(5,5)$ tir. Benzer şekilde $x=9$ için

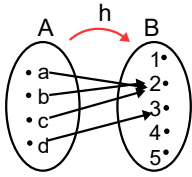
maksimum değerini alır.

Fonksiyonun maksimum noktası $(9,9)$ dur.

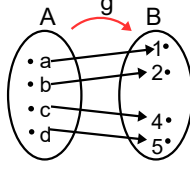


BİR FONKSİYONUN BİRE-BİRLİĞİ

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin.
Her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna bire-bir (1-1) fonksiyon denir. Kısaca, farklı elemanların görüntüleri de farklı oluyorsa fonksiyon bire-birdir denir.

Örnek...18 :

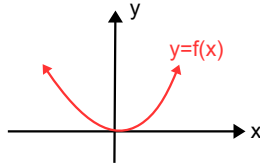
h fonksiyonu tanım kümesinin farklı en az iki elemanını değer kümesinden aynı elemanla eşleştirdiğinden bire-bir (1-1) değildir. g fonksiyonu ise farklı elemanları farklı görüntülerle eşleştirdiğinden bire-birdir.

**Bire-birlik İçin Yatay Doğru Testi**

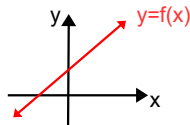
Bir fonksiyonun grafiği ve yatay olarak çizilen farklı doğrular en çok bir defa kesişiyorsa fonksiyon bire bir dir . Yatay doğrular birden çok defa fonksiyon grafiğini kesiyorsa fonksiyon 1-1 değildir.

Örnek...19 :

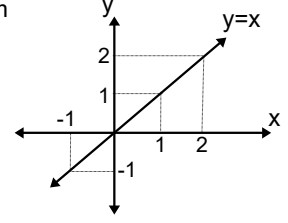
Reel sayılarda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu 1-1 midir?

**Örnek...20 :**

Reel sayılarda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu 1-1 midir?

 **$f(x)=x$ REFERANS FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ**

Kuralı $f(x) = x$ olan f fonksiyonunda x , tüm gerçek sayı değerlerini alabilir. (f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi gerçek sayılardır.) f fonksiyonu, x in aldığı tüm gerçek sayı değerlerini kendisi ile eşleştirir. (f fonksiyonunun görüntü kümesi gerçek sayılardır.) (Kısaca $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).



$x = 0$ için $f(0) = 0$ olduğu görülür. Buna göre f fonksiyonunun sıfırı sıfırdır. ($f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerine f fonksiyonunun sıfırı deniyor demiştik, bu denklemin $x=0$ dır.)

$x > 0$ iken $f(x) > 0$; $x < 0$ iken $f(x) < 0$ olduğu görülür.

f fonksiyonunun işaret özeti şekildeki tablo biçiminde yapılabilir.

x	$-\infty$		0		∞
$f(x)=x$		-	0	+	

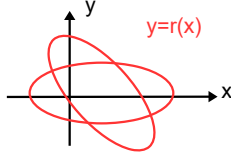
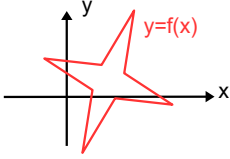
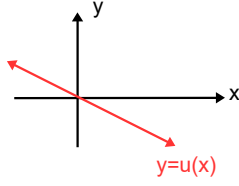
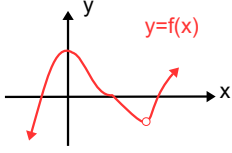
$f(x)=x$ fonksiyonu, x bağımsız değişkeni artarken y bağımlı değişkeni arttığı için artan fonksiyondur.

$f(x)=x$ fonksiyonunun görüntü kümesi bir maksimum ya da minimum değer içermez. Ancak tanım kümesi farklı alınırsa maksimum ya da minimum değerler oluşabilir.

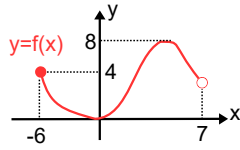
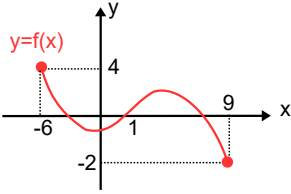
$f(x)=x$ fonksiyonunda farklı x değerleri için farklı y değerleri elde edildiğinden bu fonksiyon bire-bir dir. (Yatay doğru testi ile kontrol edilebilir.)

DEĞERLENDİRME

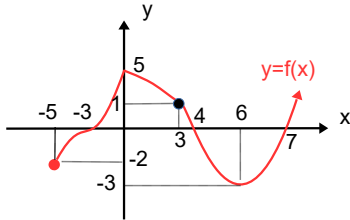
- 1) Hangisi reel sayılarda tanımlı bir fonksiyona ait olabilir?



- 2) Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini yazınız

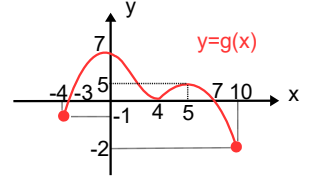


- 3) Yandaki grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir.

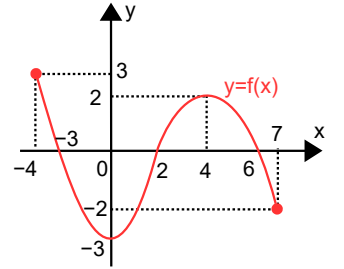


- a) Fonksiyonunun tanım, görüntü kümelerini belirtiniz.
b) işaret tablosunu yapınız
c) artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz
d) sıfırlarını yazınız
e) maksimum ve minimum noktalarını yazınız.
f) $\frac{f(3)+f(-5) \cdot f(0)}{f(6)+f(7)}$ işleminin sonucu kaçtır?

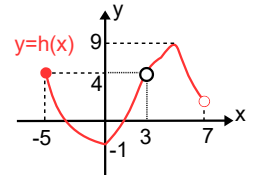
- 4) Yandaki grafik $y=g(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna fonksiyonun sıfırlarını yazınız?



- 5) $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
a) Fonksiyonunun tanım, görüntü kümelerini belirtiniz.
b) işaret tablosunu yapınız
c) artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz
d) sıfırlarını yazınız
e) maksimum ve minimum noktalarını yazınız.

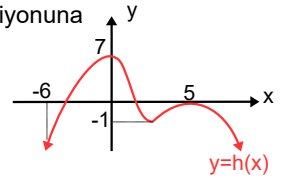


- 6) $y=h(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu fonksiyonun tanım kümesi A görüntü kümesi B olsun. Buna göre, $B-A$ kümesini yazınız



- 7) Yandaki grafik $y=h(x)$ fonksiyonuna aittir.

- a) $h(x)=0$ denkleminin kaç kökü vardır?



- b) $h(x)=-1$ denkleminin kaç kökü vardır?

- c) $h(x)=8$ denkleminin kaç kökü vardır?