

KÖKLÜ SAYILAR

n birden büyük bir doğal sayı ve a bir reel sayı olmak üzere $a^n = b$ ifadesinde a ya b nin n . kuvvetten kökü denir. Yani

$a^n = b \Rightarrow a = \sqrt[n]{b}$ a, b nin n . kuvvetten köküne eşittir.
Özel olarak

$a^2 = b \Rightarrow a = \sqrt{b}$ a, b nin kareköküne eşittir.
(2. kuvvetten kökü)

$a^3 = b \Rightarrow a = \sqrt[3]{b}$ a, b nin küp köküne eşittir.
(3. kuvvetten kökü)

$a^4 = b \Rightarrow a = \sqrt[4]{b}$ a ya, b nin 4. kuvvetten kökü denir.

UYARI:

Yukarıda gibi yazılan her köklü ifade reel sayı belirtmez; kök derecesi çiftken kök içi negatif olursa ifade reel sayı değildir (ifade karmaşık sayı belirtir). Yani

$$\sqrt[4]{-3} \notin \mathbb{R} \quad \text{ama} \quad \sqrt[3]{-3} \in \mathbb{R}$$

Örnek...1 :

$\sqrt[4]{x-3}$ ifadesinin reel sayı belirtmesi için x kaç olmalıdır?

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$x \in [3, \infty) \text{ olmalıdır.}$$

Örnek...2 :

$\sqrt[12]{8-x} + \sqrt[4]{x-2} - \sqrt[177]{x-5}$ ifadesinin reel sayı belirtmesi için x kaç olmalıdır?

$$\begin{aligned} 8-x &\geq 0 \\ x-2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{) beraber}$$

$$2 \leq x \leq 8$$

$$x \in [2, 8] \text{ olmalıdır.}$$

KÖKLÜ İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ
ÖZELLİK 1

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, n \in \mathbb{Z}^+ \quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, n \in \mathbb{Z}^+$$

Örnek...3 :

$$\sqrt[5]{(-2)^5} + \sqrt[4]{(-2)^4} - \sqrt[3]{-27} = ?$$

$$-2 + 1 - 2 - (-3) = -2 + 2 + 3 = \underline{\underline{3}}$$

Örnek...4 :

$$\sqrt{25} + \sqrt{49} + \sqrt{121} - \sqrt{(-8)^2} = ?$$

$$5 + 7 + 11 - 1 - 8 = 23 - 8 = \underline{\underline{15}}$$

Örnek...5 :

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = ?$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}-1 + |1-\sqrt{2}| &= \sqrt{2}-1-1+\sqrt{2} \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{2}-2}} \end{aligned}$$

Örnek...6 :

$$\sqrt[4]{(\sqrt{2}-5)^4} - \sqrt[6]{(5-\sqrt{2})^6} = ?$$

$$\begin{aligned} |\sqrt{2}-5| - |5-\sqrt{2}| \\ -\sqrt{2}+5-5+\sqrt{2} &= \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

ÖZELLİK 2

$n, 1$ den büyük bir tamsayı ve $a \geq 0$ ise

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Örnek...7 :

Rasyonel kuvvet olarak yazınız.

$$\sqrt{5} = 5^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} = 2^{3/3} = 2$$

$$\sqrt[6]{6} = 6^{1/6}$$

Örnek...8 : $\sqrt[3]{32 \cdot 8^5 \cdot 16^3} = 256$ eşitliğine göre, x kaçtır?

$$(2^5 \cdot 2^{15} \cdot 2^{12})^{1/x} = 2^8$$

$$2^{32/x} = 2^8 \rightarrow x = 4$$

Örnek...9 : $\sqrt[3]{(2)^{x+2}} = \sqrt[5]{(4)^{7-2x}}$ ise x kaçtır?

$$2^{x+2} = 2^{2(7-2x)} \quad x+2 = \frac{14-4x}{5}$$

$$5x + 10 = 42 - 8x \rightarrow 13x = 32$$

$$x = \frac{32}{13}$$

ÖZELLİK 3

a>0 ve k>0 olmak üzere,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[k]{a^{(m/n)}}$$

Yani kök dereceleri uygun koşullarda sadeleştirilebilir ve ya genişletilebilir

Örnek...10 :x= $\sqrt{5}$, y= $\sqrt[3]{12}$ sayılarını sıralayınız

$$x = \sqrt[6]{125}$$

$$y > x$$

$$y = \sqrt[6]{144}$$

ÖZELLİK 4

$$x \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot x^n}$$

Örnek...11 :a= $3\sqrt{5}$, b= $5\sqrt{2}$ sayılarını sıralayınız.

$$a = \sqrt{45}$$

$$b = \sqrt{50}$$

$$b > a$$

ÖZELLİK 5 (TOPLAMA VE ÇIKARMA)

$$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} - z \cdot \sqrt[n]{a} = (x+y-z) \sqrt[n]{a}$$

Örnek...12 : $3\sqrt{2} + 5\sqrt{128} - 2\sqrt{32} = ?$

$$3\sqrt{2} + 5 \cdot 8\sqrt{2} - 2 \cdot 4\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} + 40\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 35\sqrt{2}$$

Örnek...13 : $\sqrt{28} - 3\sqrt{63} - 6\sqrt{112} = ?$

$$2\sqrt{7} - 3 \cdot 3\sqrt{7} - 6 \cdot 4\sqrt{7}$$

$$2\sqrt{7} - 9\sqrt{7} - 24\sqrt{7}$$

$$-31\sqrt{7}$$

Örnek...14 : $3\sqrt{80} - 6\sqrt{20} + 2\sqrt{45} = ?$

$$3 \cdot 4\sqrt{5} - 6 \cdot 2\sqrt{5} + 2 \cdot 3\sqrt{5}$$

$$12\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{2}$$

ÖZELLİK 6 (ÇARPMA)

$$(m \cdot \sqrt[n]{a}) \cdot (p \cdot \sqrt[n]{b}) \cdot \sqrt[n]{c} = m \cdot p \cdot \sqrt[n]{abc}$$

Örnek...15 : $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = ?$

$$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$$

Örnek...16 :

$$3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = ?$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} &= 6 \sqrt{36} \\ &= 6 \cdot 6 \\ &= \underline{\underline{36}} \end{aligned}$$

Örnek...17 :

$$(\sqrt{6}-1) \cdot (\sqrt{6}+1) = ?$$

$$(\sqrt{6})^2 - 1^2 = 6 - 1 = 5$$

Not $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ÖZELLİK 7 (BÖLME)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Örnek...18 :

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = ? \quad \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

Örnek...19 :

$$\frac{\sqrt{0,63}}{\sqrt{0,07}} = ? \quad \frac{\sqrt{\frac{63}{100}}}{\sqrt{\frac{7}{100}}} = \frac{3\sqrt{7}}{10} \cdot \frac{10}{\sqrt{7}} = 3$$

Örnek...20 :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{2}} = ? \quad & 4\sqrt{\frac{128}{2}} = 4\sqrt{64} \\ &= 4\sqrt{2^6} \\ &= \sqrt{2^3} \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Örnek...21 :

$$\sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}} = ?$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[12]{2^3} \cdot \frac{\sqrt[12]{4^4}}{\sqrt[12]{2^2}} \\ & \sqrt[12]{\frac{2^3 \cdot 2^8}{2^2}} = \sqrt[12]{2^9} = 4\sqrt{2^3} = 4\sqrt{8} \end{aligned}$$

Örnek...22 :

$$\frac{(\sqrt{4,4} + \sqrt{9,9})}{\sqrt{0,1}} = ?$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{44}{10}} + \sqrt{\frac{99}{100}}}{\sqrt{\frac{1}{10}}} \rightarrow \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{10}} \\ & = \frac{\sqrt{44} + \sqrt{99}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{44} + \sqrt{99} \\ & = 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} \\ & = \underline{\underline{5\sqrt{11}}} \end{aligned}$$

Örnek...23 :

$$\frac{(\sqrt{1,47} + \sqrt{0,75})}{\sqrt{75}} = ?$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{147}{100}} + \sqrt{\frac{75}{100}}}{\sqrt{75}} \\ & \frac{\frac{7\sqrt{3}}{10} + \frac{5\sqrt{3}}{10}}{5\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{10} \cdot \frac{1}{5\sqrt{3}} \\ & = \underline{\underline{\frac{6}{25}}} \end{aligned}$$

Örnek...24 :

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} = ?$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 5}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \quad \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ & \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) [1 + \sqrt{5}]}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \underline{\underline{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}} \end{aligned}$$

ÖZELLİK 8 (İÇ İÇE KÖK DURUMU)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot p]{x}$$

$$\sqrt[m]{x \cdot \sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a \cdot x^n}$$

Örnek...25 :

$$\sqrt[5]{1024} = ?$$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1024} &= \sqrt[5]{2^{10}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Örnek...26 :

$\sqrt[3]{4}\sqrt{8} = \sqrt{x}$ ise $x+y$ toplamı en az kaçtır?
(x ve y sayma sayılarıdır)

$$\sqrt[24]{8} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt[8]{2} = \sqrt{y}$$

$$\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 2 \\ \hline &10 \end{aligned}$$

Örnek...27 :

$$\sqrt[3]{4\sqrt[5]{32}} = ?$$

$$\sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Örnek...28 :

$\sqrt[3]{4\sqrt{x}} = \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{2}}$ ise x kaçtır?

$$\sqrt[15]{4^5 \cdot x} = \sqrt[6]{4^2 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^5}$$

$$\sqrt[30]{(4^5 \cdot x)^2} = \sqrt[30]{(2^5)^5}$$

$$4^{10} \cdot x^2 = 2^{25}$$

$$x^2 = \frac{2^{25}}{2^{20}} = 2^5$$

$$x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

ÖZELLİK 10 (PAYDANIN RASYONEL YAPILMASI)

$$i) \frac{K}{\sqrt{a}} = \frac{K}{\sqrt{a}} = \frac{K(\sqrt{a})}{a}$$

Örnek...29 :

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = ? \quad \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Örnek...30 :

$$\frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{21}{5\sqrt{3}}$$

$$(\sqrt{3}) (\sqrt{3})$$

$$\frac{12\sqrt{3}}{3} + \frac{21\sqrt{3}}{5 \cdot 3}$$

$$4\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{5} = \frac{27\sqrt{3}}{5}$$

$$ii) \frac{K}{\sqrt{a+b}} = \frac{K}{\sqrt{a+b}} = \frac{K(\sqrt{a-b})}{a-b}$$

Örnek...31 :

$$\frac{24}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = ?$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

$$\frac{24(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}$$

$$= 12(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

Örnek...32 :

$$\frac{24}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}-1} = ?$$

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{3}+1$$

$$\frac{24\sqrt{3}}{3} - \frac{12(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 8\sqrt{3} - 6(\sqrt{3}+1)$$

$$= 2\sqrt{3} - 6$$

Örnek...33 :

$a = \sqrt{3}-1$, $b = \sqrt{3}+1$ ise $\frac{a+b}{b+a} = ?$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} &= \frac{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1}{3-1} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

DEĞERLENDİRME

- 1) $\sqrt[12]{14-2x} + \sqrt[4]{x-7} - 3x + 5$ reel sayısının değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} 4-2x &\geq 0 \rightarrow x \leq 7 \\ x-7 &\geq 0 \rightarrow x \geq 7 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 4-2x &\geq 0 \\ x-7 &\geq 0 \end{aligned}} \right\} x=7$$

sayı $\sqrt[12]{0} + \sqrt[4]{0} - 3 \cdot 7 + 5 = -16$

- 2) $x < 0 < y < z$ veriliyor.

$$\sqrt[3]{(x-y-z)^3} + \sqrt[4]{(x-y-z)^4} + \sqrt{(x-y)^2}$$

ifadesinin eşitini bulunuz?

$$\begin{aligned} x-y-z + |x-y-z| + |x-y| \\ x-y-z -x+y+z-x+y \\ -x+y \end{aligned}$$

- 3) $\sqrt{169} - \sqrt[8]{(-2)^8} + \sqrt[3]{-64} = ?$

$$\begin{aligned} 13 - 1 - 2 + (-4) \\ 13 - 2 - 4 = 7 \end{aligned}$$

- 4) $\sqrt[5]{9^{2x-1}} = \sqrt[4]{27^{4-3x}}$ ise x kaçtır?

$$\begin{aligned} (3^2)^{\frac{2x-1}{5}} &= 3^{\frac{3(4-3x)}{4}} \\ \frac{6x-2}{5} &= \frac{12-9x}{4} \quad 16x-8 = 60-45x \\ 61x &= 68 \\ x &= \frac{68}{61} \end{aligned}$$

- 5) $2\sqrt{99} - 3\sqrt{44} + 6\sqrt{176} = ?$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3\sqrt{11} - 3 \cdot 2\sqrt{11} + 6 \cdot 4\sqrt{11} \\ 6\sqrt{11} - 6\sqrt{11} + 24\sqrt{11} = 24\sqrt{11} \end{aligned}$$

- 6) $a = \sqrt{71} - \sqrt{70}$, $b = \sqrt{67} - \sqrt{66}$ sayılarını sıralayınız.

$$a = \sqrt{71} - \sqrt{70} = \frac{1}{\sqrt{71} + \sqrt{70}}$$

$$b = \sqrt{67} - \sqrt{66} = \frac{1}{\sqrt{67} + \sqrt{66}}$$

$$b > a$$

- 7) $\frac{20}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} = ?$

$$(\sqrt{5}) (\sqrt{2-1}) (\sqrt{2+1})$$

$$\frac{20\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2+1}}{2-1} - \frac{\sqrt{2-1}}{2+1}$$

$$4\sqrt{5} + \sqrt{2+1} - \sqrt{2-1} = 4\sqrt{5} + 2$$

- 8) a_1, a_2, \dots, a_n gibi n tane sayının

$$\text{aritmetik ortalaması } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{geometrik ortalaması } G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \text{ olarak tanımlanmıştır.}$$

Buna göre 1, 2 ve 4 sayılarının aritmetik ortalaması geometrik ortalamasının kaç katıdır?

$$A.O = \frac{1+2+4}{3} = 7/3$$

$$G.O = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\frac{7/3}{2} = \frac{7}{6}$$

9) Mehmet Bey, 7200 m² lik kare şeklindeki aşağıdaki şekilde arazisinin nehire komşu olan kenarı dışında kalan kısmınının çevresini çitle çevirmek istemektedir. Mehmet Bey'in kullanacağı çit 10 metrelik paneller halinde satılmakta olup panelin tanesi 1400 Türk lirasıdır.



Buna göre, Mehmet Bey bu işi en az maliyetle yaklaşık kaç Türk lirası harcayarak tamamlayabilir?

$$\sqrt{7200} = \sqrt{72} \cdot \sqrt{100} = 6\sqrt{2} \cdot 10 = 60\sqrt{2}$$

60√2 bir kenar

$$3 \text{ kenar } 3 \cdot 60\sqrt{2} = 180\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad 180 \cdot \sqrt{2} = 180 \cdot 1,41 = 253,8$$

$$\frac{253,8}{10} = 25,38 \rightarrow 26 \text{ çit}$$

$$26 \cdot 1400 = 36400$$