

MANTIK – 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

Terim: Bir bilim dalı içerisinde konuşma dilinden farklı anlamı olan sözcüklerden her birine o bilim dalının bir terimi denir.

Örneğin açığı bir geometri terimi, toplama bir matematik terimi ve kütle bir fizik terimidir.

Bir terimin anlamını belirlemeye terimi tanımlamak denir.

Örneğin "Üç kenarının uzunluğu eşit üçgene eşkenar üçgen denir" ifadesi bir tanımdır.

Bir terimi tanımlamak için o bilim dalı içerisinde daha önce tanımlanmış terim ve kavramlardan yararlanır. Bazı terimlerin tanımı yoktur. Örneğin nokta, doğru, küme gibi terimler tanımsızdır ; bu gibi terimler sezgisel alınır.

Mantık akıl yürütme yöntemlerini inceleyen bilim dalıdır.

Mantığa matematiksel yapıyı kazandıran George Boole 1848 yılında "Mantığın Matematik Analizi" adlı bir çalışmayı yayınlamıştır. İki değerli Aristoteles mantığını matematiksel temellere oturtan simgesel mantığı yaratmıştı. (Boole mantığı, Boole cebiri, matematiksel mantık, simgesel mantık)

Önerme: Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm içeren ifadelere önerme denir.

Örnek...1 :

Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadıklarını belirtiniz.

- Alfabemizde 50 harf vardır
- Bir gün 18 saattir
- Bir üçgenin iç açıları toplamı 180° dir
- Ders çalışalım
- Ali çalışkan bir çocuktur.

Önermeler p,q,r,s gibi harflerle belirtilirler.

p: " Bir yıl 265 gün 6 saattir."
r : "2 sayısı irrasyonel bir sayıdır."

Doğruluk Değeri : Bir önermenin doğru ya da yanlış oluşuna , o önermenin doğruluk değeri denir .

Herhangi bir öneme için yanlış veya doğru olmak üzere iki durum söz konusudur.

Uluslar arası birliğin sağlanması açısından doğru yerine 1 simgesi yanlış yerine 0 simgesi kullanılır.

Buradaki 1 ve 0 simgelerinin sayısal bir değeri yoktur.

Örnek...2 :

Herhangi bir P önermesinin doğruluk değerini tablo ile gösteriniz.

P önermesinin doğruluk değeri 1 ve 0 olabileceğinden tablo ile gösterirsek (özetlersek)

| |
|---|
| P |
| 0 |
| 1 |

Örnek...3 :

Herhangi p ve q önermelerinin doğruluk değerini tablo ile gösteriniz .

MANTIK – 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

Örnek...4 :

Herhangi üç p,q ve r önermelerinin doğruluk değerini tablo ile gösteriniz .

Denk Önermeler: Doğruluk değeri aynı olan önermelere denk önerme denir .
Eğer p ve q gibi iki önerme birbirine denk ise bunu $p \equiv q$ biçiminde belirtiriz.

Örnek...5 :

- p : "Van Türkiye'nin başkentidir."
q : " İstanbul 'un plaka numarası 34' tür ."
r : "Zonguldak Karadeniz Bölgesindedir."
t : "Almanya Avrupa kıtasındadır."
s : "3>7"
v : "5 asal bir sayı değildir."
önermelerinden denk olanları belirtiniz

Bir Önermenin Olumsuzu/Değili : Bir önermenin hükmünün olumsuzu alınarak yapılan yeni önermeye , o önermenin olumsuzu denir .

Bir p önermesinin olumsuzu p' (veya $\sim p$) ile gösterilir.

Verilen bir önermenin olumsuzunu bulmak için önermenin sonuna değil sözcüğü getiririz.

Örnek...6 :

- p : "2 asal bir sayıdır."
q : " 2=3"
r : " Kar beyazdır."
s : "Antalya Akdeniz bölgesindedir."
önermelerinin olumsuzunu (değilllerini) yazınız

Örnek...7 :

Tabloyu doldurunuz

| P | P' |
|---|----|
| | |
| | |
| | |

Uyarı

$(=)'$ = \neq , $(<)'$ = \geq ; $(>)'$ = \leq

Bileşik Önerme : İki ya da daha fazla önermenin "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" bağlaçları ile birleşmesiyle elde edilen yeni önermelere bileşik önerme denir.

| Bağlaç Adı | Bağlacı Temsil Eden Sembol |
|---|----------------------------|
| veya | \vee |
| ve | \wedge |
| ya da | \vee |
| ise | \Rightarrow |
| ancak ve ancak (gerek ve yeter şart) | \Leftrightarrow |

- p : "Ali siyah saçlıdır."
r : "3+4=7" önermeleri için bağlaçları kullanarak bileşik önermeler yapınız.

MANTIK – 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

1. “Veya” Bağlacı : p ile q önermelerinden en az biri doğru ise “veya” bağlacı ile kurulan “p veya q” bileşik önermesi doğru, p ile q nun her ikisi de yanlış ise “p veya q” bileşik önermesi yanlıştır.

p veya q bileşik önermesi genellikle $p \vee q$ ile belirtilir.

Tanıma göre $p \vee q$ nun tablosu :

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| 1 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 0 | 0 | |

biçimindedir.

Örnek...8 :

p: “ $3 < 7$ ”
q: “10 asal bir sayıdır.”
r: “ $2 = 3$ ”
s: “üzüm bir meyvedir” önermeleri için veya ile bileşik önermeler yapınız.
Bu bileşik önermelerin doğruluk değerini bulunuz.

2. “Ve” Bağlacı : p ile q önermelerinin her ikisi de doğru ise ‘ve’ bağlacı ile kurulan “p ve q” bileşik önermesi doğru, p ile q nun en az biri yanlış ise “p ve q” bileşik önermesi yanlıştır.

p ve q bileşik önermesi genellikle $p \wedge q$ ile belirtilir.

Tanıma göre $p \wedge q$ nun tablosu:

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| 1 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 0 | 0 | |

biçimindedir

Örnek...9 :

p: “ $3 > 7$ ”
q: “5 tek bir sayıdır.”
r: “ $2 \leq 3$ ”
s: “Salı gününden sonra Pazar günü gelir.”
önermeleri için “ve” ile bileşik önermeler yapınız.
Bu bileşik önermelerin doğruluk değerini bulunuz.

\vee ve \wedge işleminin özellikleri

p, q ve r birer önerme olsun

1. Tek kuvvet özelliği : p önermesi için
 $p \vee p \equiv p$ ve $p \wedge p \equiv p$

2. Değişme özelliği : $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. Birleşme özelliği :
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (q \vee p) \vee r$ ve
 $p \wedge (q \vee r) \equiv (q \wedge p) \wedge r$

4. Dağılım özelliği :
 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
 $(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$ ve
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,
 $(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$

5. De Morgan Kuralları: $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$
ve $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

MANTIK - 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

Örnek...10 :

De Morgan kurallarının varlığını doğruluk tabloları yardımıyla gösterelim.

| p | q | p' | q' | p ∧ q | (p ∧ q)' | p' ∨ q' |
|---|---|----|----|-------|----------|---------|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

| p | q | p' | q' | p ∨ q | (p ∨ q)' | p' ∧ q' |
|---|---|----|----|-------|----------|---------|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Örnek...11 :

$p \equiv 0$, $q \equiv 1$, $r \equiv 1$ ise $[p' \wedge r] \vee (p' \vee q)'$ önermesinin en sade hali nedir?

Örnek...12 :

$p \vee q \equiv 0$, $p' \wedge r \equiv 1$ veriliyor hangileri doğru olabilir?
i) p ii) $p \wedge r$ iii) $q' \vee r'$

Önermeler cebri : Bir denklik doğruluk tablosu yapılmadan bağlaçların özellikleri kullanılarak ta gösterilebilir. Bu işlemlerin tümüne önermeler cebri denir

Örnek...13 :

Doğruluk tablosu yapmadan aşağıdaki önermelerin doğrulayınız.

1. $p \vee [p' \wedge (q \vee p)] \equiv p \vee q$

2. $[p \vee (q' \wedge p')] \wedge (p \vee q) \equiv p$

Örnek...14 :

$\{(p \vee q) \wedge (p \vee q')\} \vee p'$ önermesinin en sade hali nedir?

Örnek...15 :

$\{(p \wedge q) \vee (p' \wedge q)\} \vee q$ önermesinin en sade hali nedir?

Kümelerle yapılan işlemler ve sembolik mantıkta kullanılan sembol, gösterim ve bunlarla ifade edilen işlemler arasında aşağıdakine benzer ilişkilendirmeler yapılabilir.

| | | | | | | |
|-----------------|-------------|---|--------|----------|---|----------|
| Sembolik mantık | 0 | 1 | \vee | \wedge | ' | \equiv |
| Kümeler | \emptyset | E | \cup | \cap | ' | = |

MANTIK – 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

Örnek...16 :

Mantık işlemlerine karşılık gelen küme ilişkilendirmelerini yazınız

| Sembolik mantık | Kümeler |
|--|-----------------|
| $p \vee p' \equiv 1$ | $A \cup A' = E$ |
| $p \wedge p' \equiv 0$ | |
| $p \wedge (q \vee r) \equiv$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | |
| $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ | |

Örnek...17 :

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ eşitliğini sembolik mantık kurallarından yararlanarak gösteriniz

3. "ya da" Bağlacı : p ile q önermeleri denk önermelerken "ya da" bağlacı ile kurulan "p ya da q" bileşik önermesi yanlış, aksi taktirde "p ya da q" bileşik önermesi doğrudur.

p ve q bileşik önermesi genellikle $p \vee q$ ile belirtilir.

Tanım göre $p \vee q$ nun tablosu :

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| 1 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 0 | 0 | |

biçimindedir.

1) $(1 \vee 0) \wedge 1 \equiv ?$

2) $(0 \vee 0) \vee 1 \equiv ?$

3) $(p \vee p') \wedge (q \vee q) \equiv ?$

Örnek...18 :

$p \equiv 1, q \equiv 0$ olduğuna göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

I. $(p \vee q) \wedge r \equiv$

II. $((p \vee q)') \vee q' \wedge r \equiv$

III. $[(p \vee r') \wedge (r' \wedge q)] \wedge q' \equiv$

IV. $(p \vee r) \wedge [(q \wedge r') \vee (r \vee q')]$

Örnek...19 :

$(0 \wedge 1)' \wedge p \equiv 0$ ve $q \vee [(0 \vee 0') \wedge (1 \wedge 0)] \equiv 0$ ise p ve q önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz

MANTIK – 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

4. **İse bağlacı** : p doğru bir önerme q yanlış bir önerme iken ise bağlacı ile yapılan "p ise q" bileşik önermesi yanlış diğer durumlarda doğrudur.

"p ise q" önermesi genellikle $p \Rightarrow q$ ile belirtilir.

Tanım göre p ise q bileşik önermesinin tablosu

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| 1 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 0 | 0 | |

Koşullu öneme : "ise" bağlacı ile oluşturulan $p \Rightarrow q$ bileşik önermesine koşullu önerme denir.

$p \Rightarrow q$ önermesinde p ye hipotez (varsayım), q ya ise hüküm (yargı) denir.

Örnek...20 :

p:"2=3"

q:"Pazar bir hafta sonu günüdür" önermeleri için $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ önermelerini yazınız.

$p \Rightarrow q$ doğru ise $p \Rightarrow q$ önermesine gerektirme denir ve "p gerektirir q" şeklinde okunur.

p ye gerektirmenin yeter koşulu (şartı) , q ya ise gerektirmenin gerek koşulu denir.

Örnek...21 :

p:"2 tek çift asal sayıdır"

q:"asal sayıların iki tane pozitif böleni vardır" önermeleri için $p \Rightarrow q$ önermesi gerektirme midir?

Önermenin Karşıtı , Tersi ve Karşıt Tersi

$p \Rightarrow q$ önermesi verilsin. Bu önerme için :

1. $q \Rightarrow p$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı
2. $p' \Rightarrow q'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi
3. $q' \Rightarrow p'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi denir

Örnek...22 :

"Hava sıcak ise pi rasyonel bir sayıdır." önermesinin :
i) karşıtı ii) tersi iii) karşıt tersini

Örnek...23 :

$(p \Rightarrow q) \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösteriniz.

| p | q | p' | q' | $p \Rightarrow q$ | $q' \Rightarrow p'$ |
|---|---|----|----|-------------------|---------------------|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

MANTIK - 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

Örnek...24 :

$(p \Rightarrow q) \equiv p' \vee q$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösteriniz

Örnek...25 :

$2 \leq 3 \Rightarrow 2$ asal sayıdır önermesinin i) karşıtı ii) tersi iii) karşıt tersini iv) değilini

Örnek...26 :

$(p \wedge q) \Rightarrow q$ bileşik önermesinin en sade hali nedir?

Örnek...27 :

$(p' \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ bileşik önermesinin en sade hali nedir?

5. Ancak ve ancak Bağlacı : p ve q iki önerme olsun. 'ancak ve ancak' bağlacı ile kurulan "p ancak ve ancak q" önermesi $p \equiv q$ ise doğru aksi taktirde yanlıştır.

"p ancak ve ancak q" önermesi genellikle $p \Leftrightarrow q$ ile belirtilir.

$p \Leftrightarrow q$ önermesine ancak ve ancak bağlacı ile yapılan iki yönlü koşullu önerme denir.

$p \Leftrightarrow q$ önermesi doğruysa bu önermeye çift gerektirme de denir.

Örnek...28 :

$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosunu yapınız.

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|-----------------------|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Örnek...29 :

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ olduğunu tablo yaparak gösteriniz.

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|-----------------------|-------------------|-------------------|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Örnek...30 :

Hangileri kesinlikle doğrudur?

- $p \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \wedge p' \equiv 0$
- $1 \vee q \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- $0 \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Örnek...31 :

- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q$ olduğunu
- doğruluk tablosu yaparak
 - önermeler cebiri kullanarak gösteriniz.

MANTIK – 1

ÖNERMELER- BİLEŞİK ÖNERMELER

DEĞERLENDİRME

1) 4 önerme için bir tablo hazırlandığında bu tabloda en çok ve en az satır sayısı kaç olur?

2) n farklı önerme için 512 değişik durum mevcutsa, n kaçtır?

3) $\{(0 \vee 1) \wedge (1 \wedge 0)\}'$

4) $p \vee 0 \equiv 1$
 $1 \wedge q \equiv 0$ ise $(p \vee q') \Rightarrow (p \wedge q)$ önermesi neye denktir?

5) $p \equiv 1, q \equiv 0, r \equiv 1, s \equiv 1$ ve $k \equiv 0$ olduğuna göre $\{(p \wedge q) \vee k'\} \wedge (q' \vee s)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz

6) $(p \vee p') \wedge (q \Rightarrow q \vee q) \equiv ?$

7) “ π rasyonel sayı ise kar beyazdır” önermesinin karşıtı, tersi, karşıt tersi ve değili nedir?

8) $\{(p \vee q) \Leftrightarrow q\} \vee p \equiv 1$ olduğunu
a) doğruluk tablosu yaparak
b) önermeler cebiri kullanarak gösteriniz.

9) Bir bileşik önerme kendisini oluşturan önermelerin her biri için daima doğru oluyorsa bu bileşik önermeye toloji; daima yanlış oluyorsa bu önermeye çelişki denir.

Buna göre, p ve q önermeleri için aşağıdaki bileşik önermelerden toloji ya da çelişki belirtenleri bulunuz.

I. $p \vee p'$

II $p \Leftrightarrow p'$

III. $p \vee (q \vee p')$

IV. $(p' \wedge q) \wedge (q' \vee p)$

V. $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$

Mantık konusuna katkıları için araştırınız

George Boole

Augustus De Morgan

Gottfried Leibniz