

Bir soru, bir çözüm

$f(x) = -2\sqrt{x-4} + 3$ fonksiyonunun grafiğini, $g(x) = \sqrt{x}$ referans fonksiyonuna dönüşümler uygulayarak çiziniz.

Grafiksel ve Cebirsel yöntemleri kullanarak

- a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
 - b) Sıfırını ve y eksenini kesim noktasını
 - c) Artanlık ve azalanlık durumunu
 - d) Maksimum ve minimumlarını
 - e) İşareti
 - f) bire birlik durumunu
 - g) örten olma durumunu
 - h) tek/çift olma durumunu
- belirtiniz.

Çözüm

Önce grafiğini çizelim sonra grafik üzerinden nitel özelliklerine bakalım

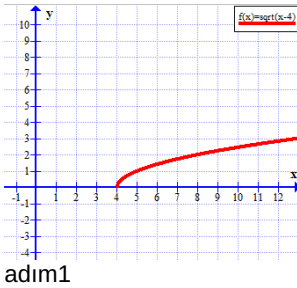
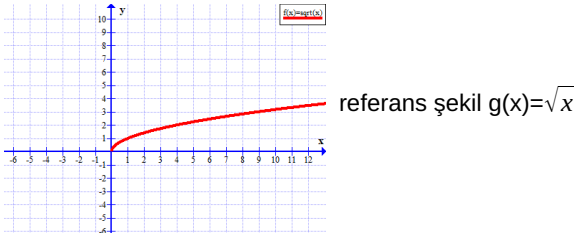
$f(x)$ fonksiyonu $g(x)$ türünden yazalım. Dikkat edilirse $f(x) = -2.g(x-4) + 3$ olacağından sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanır.

Adım 1.) $g(x)$ x eksenini boyunca pozitif yönde 4 birim ötelenir (4 birim sağa kaydırılır)

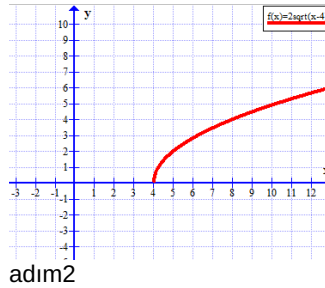
Adım 2.) 2 kat germe uygulanır. (grafik x eksenine olan mesafeler 2 kat olacak şekilde dikey uzatılarak/gerilerek çizilir)

Adım 3.) x eksenine göre yansıma alınır. (şekil x eksenine göre katlanır)

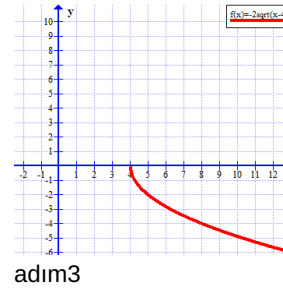
Adım 4.) y eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenir ve çizim tamamlanır (3 birim yukarı kaydırılır)



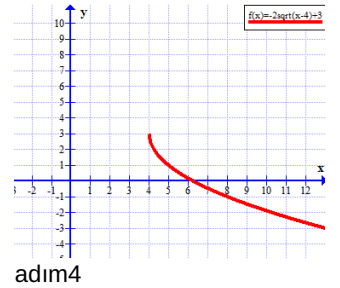
adım1



adım2



adım3



adım4

Not: Grafiği ogm materyal bağlantısını açıp $a = -2$, $r = -4$ ve $k=3$ seçerek çizdirebilirsiniz. [Bağlantı](#)

Grafik üzerinden inceleme

- a) **Tanım ve Görüntü Kümeleri** Grafiğe göre: Tanım Kümesi $[4, \infty)$ Görüntü Kümesi $(-\infty, 3]$
- b) **Sıfırını ve y eksenini kesim noktasını.** Y eksenini kesim noktası yoktur. Grafikten sıfırı 6 ile 7 arasındadır, tam değerini cebirsel yolda bulacağız.
- c) **Artanlık ve azalanlık durumu** grafiğe göre, tanım kümesindeki artan x değerlerine karşılık azalan y değerleri geldiği görülmektedir. Bu sebeple fonksiyon azalandır. (daima azalan)
- d) **Maksimum ve minimumlarını** : Grafiğe göre en büyük değeri 3 dolayısıyla maksimum değeri 3 tür. Maksimum noktası, y nin olması için apsis değeri 4 olmalıdır, dolayısıyla maksimum noktası (4,3) tür.
- e) **İşareti**: Grafiğe göre fonksiyon sıfırına kadar pozitif, sıfırından sonra negatif değerler almaktadır. Eğer fonksiyonun sıfırına x_1 dersek $[4, x_1]$ için pozitif (x_1, ∞) için negatif deriz. (Sıfırını cebirsel işlemler içinde göstereceğiz.)
- f) **bire birlik durumu**: Grafikte eğer x eksenine paralel (yani yatay) çizgiler çizersek grafiği daima tek noktada keseceğinden fonksiyon bire birdir.
- g) **örten olma durumu**: Fonksiyonun değer kümesi belirtilmemiş, eğer değer kümesi $(-\infty, 3]$ ise fonksiyon örten, eğer değer kümesi $\mathbb{R}$ ise fonksiyon örten değildir (örten değilse "içine"dir de denir)
- h) **tek/çift olma durumu**: Grafiğe göre fonksiyonun tanım kümesi simetrik aralık değildir, ayrıca yine grafiğe göre fonksiyonun belirttiği eğrinin y eksenine ya da orijine göre simetrik olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla fonksiyon tek ya da çift değildir.

Cebirsel inceleme (Bu bölümü yaparken elimizde grafik olmadığını varsayıyoruz, eğer işlem yapmanıza rağmen emin olmadığınız durumlar varsa cebirsel yöntemlerle bulduğunuz sonuçları, fonksiyonun grafiğini çizip “çapraz” kontrol edebilirsiniz)

$$f(x) = -2\sqrt{x-4} + 3$$

a) **Tanım ve Görüntü Kümeleri:** Kareköklü ifadeler , karekök içi negatif olmayacak sayılar için tanımlı olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x-4 \geq 0$ için tanımlıdır. $x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$ Dolayısıyla tanım kümesi $[4, \infty)$ olur. 4 den büyük ya da eşit tüm x değerleri için $\sqrt{x-4} \geq 0 \rightarrow -2\sqrt{x-4} \leq 0 \rightarrow -2\sqrt{x-4} + 3 \leq 3$ olduğundan Görüntü Kümesi $(-\infty, 3]$ olur.

b) **Sıfırını ve y eksenini kesim noktasını.** y eksenini kesim noktası yoktur. ($x=0$ tanım kümesinde yoktur .) Fonksiyonun sıfırını bulmak için cebirsel ifadesini 0 a eşitleyip köklü denklemi çözelim

$$-2\sqrt{x-4} + 3 = 0 \rightarrow 2\sqrt{x-4} = 3 \rightarrow (\sqrt{x-4})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow x-4 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \frac{25}{4}$$
 dolayısıyla fonksiyonun sıfırı $\frac{25}{4}$ ve x eksenini

kestiği nokta $(\frac{25}{4}, 0)$ olur.

c) **Artanlık ve azalanlık durumu**

$\forall x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa $f(x)$ artan, $\forall x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa $f(x)$ azalan oluyordu

$$4 \leq x_1 < x_2 \rightarrow 0 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4 \rightarrow \sqrt{x_1 - 4} < \sqrt{x_2 - 4} \rightarrow -2\sqrt{x_1 - 4} > -2\sqrt{x_2 - 4} \rightarrow -2\sqrt{x_1 - 4} + 3 > -2\sqrt{x_2 - 4} + 3 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

olduğundan tanım kümesinde $f(x)$ fonksiyonu azalandır.

d) **Maksimum ve minimumlarını :** $4 \leq x \rightarrow 0 \leq x-4 \rightarrow \sqrt{x-4} \geq 0 \rightarrow -2\sqrt{x-4} \leq 0 \rightarrow -2\sqrt{x-4} + 3 \leq 3 \rightarrow f(x) \leq 3$ olacağından maksimum değer 3, minimum değer yoktur. $y=3$ olması için

$$-2\sqrt{x-4} + 3 = 3 \rightarrow -2\sqrt{x-4} = 0 \rightarrow x = 4 \text{ olmalıdır.}$$

Maksimum noktası $(4, 3)$ olur.

e) **İşareti:** fonksiyonun sıfırı $\frac{25}{4}$ idi. Tablosunu yapalım. $-2\sqrt{x-4} + 3$ ifadesi çok büyük x değerleri için

negatiftir. (Tablonun x olan satırında farklı aralıklarda değerler vererek, $f(x)$ satırındaki işaretleri bulabilirsiniz)

x	$-\infty$	4	$\frac{25}{4}$	∞
f(x)	tanımsız	+++	○	-----

tabloya göre $[4, \frac{25}{4})$ için $f(x)$ pozitif, $(\frac{25}{4}, \infty)$ $f(x)$ negatiftir.

f) **bire birlik durumu:** $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ oluyorsa (sadece $x_1 = x_2$ başka ekstra durum olmamalı) f birebirdir

$f(x_1) = f(x_2)$ olsun $-2\sqrt{x_1-4} + 3 = -2\sqrt{x_2-4} + 3 \rightarrow \sqrt{x_1-4} = \sqrt{x_2-4} \rightarrow x_1-4 = x_2-4 \rightarrow x_1 = x_2$ olacağından $f(x)$ birebirdir.

g) **örten olma durumu:** Değer kümesinden seçilecek her y için bir x bulunup bulunmayacağını kontrol edelim.

Fonksiyonun değer kümesi belirtilmemiş, eğer değer kümesi $(-\infty, 3]$ ise bu aralıktan seçilecek bir y değeri için $-2\sqrt{x-4} + 3 = y \rightarrow 2\sqrt{x-4} = 3 - y$ ve bu denklemi sağlayan bir x değeri bulunabileceğinden (karekökün negatif olmayan bir sayıya eşitlendiğini görünüz) yani çözümü olacağından fonksiyon örten olur.

Eğer değer kümesi R ise bu aralıktan seçilecek bir y değeri için çözüm olmayabileceğini gösterelim.(yani seçilecek değere karşılık x bulunmayabileceğini gösterelim) $-2\sqrt{x-4} + 3 = y \rightarrow 2\sqrt{x-4} = 3 - y$ son denklemde eğer $y > 3$ seçersek köklü ifade negatif değere eşitleneceğinden (örneğin $y=5$ olsun $2\sqrt{x-4} = -2$ için denklem R de çözümsüzdür). Dolayısıyla değer kümesi R için fonksiyon örten değildir. (ya da içine fonksiyondur deriz)

h) **tek/çift olma durumu:**

eğer $\forall x, f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu çift fonksiyondur, eğer $\forall x, f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu tek fonksiyondur $f(-x) = -2\sqrt{-x-4} + 3 \neq f(x)$ (yani fonksiyon çift fonksiyon değildir), $f(-x) \neq -f(x)$ (yani fonksiyon tek fonksiyon değildir)

Dolayısıyla $f(-x) = f(x)$ ya da $f(-x) = -f(x)$ eşitlikleri sağlanmadığından $f(x)$ tek ya da çift değildir. (Tanım kümesini bulduktan sonra da kümenin 0 sayısına göre simetrik olmaması sebebiyle de $f(x)$ fonksiyonu tek ya da çift değildir diyebilirdik)