

## Bir soru, bir çözüm

$g(x) = \frac{-3}{x-2} - 4$  fonksiyonunun grafiğini,  $f(x) = \frac{1}{x}$  referans fonksiyonuna dönüşümler uygulayarak çiziniz.

Grafiksel ve Cebirsel yöntemleri kullanarak

- Tanım ve Görüntü Kümeleri
  - Sıfırını ve y eksenini kesim noktasını
  - Artanlık ve azalanlık durumunu
  - Maksimum ve minimumlarını
  - İşaretini
  - bire birlik durumunu
  - örten olma durumunu
  - tek/çift olma durumunu
- belirtiniz.

### Çözüm

Önce grafiğini çizelim sonra grafik üzerinden nitel özelliklerine bakalım

$g(x)$  fonksiyonu  $f(x)$  türünden yazalım. Dikkat edilirse  $g(x) = -3 \cdot f(x-2) - 4$  olacağından sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanır.

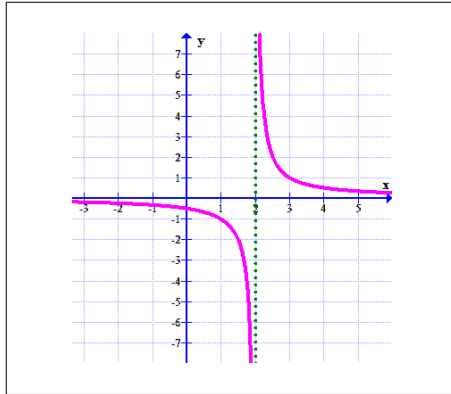
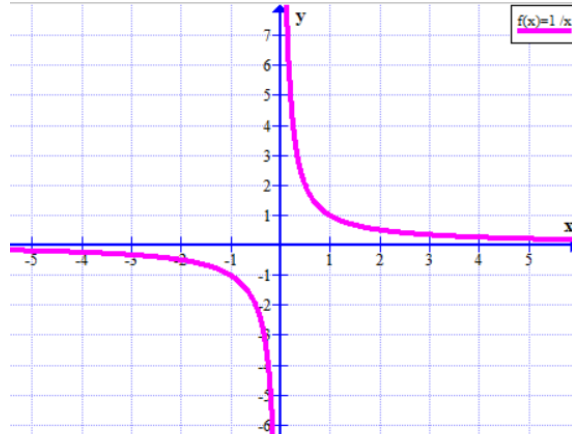
Adım 1.)  $f(x)$  x eksenini boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenir (2 birim sağa kaydırılır)

Adım 2.) 3 kat germe uygulanır. (grafik x eksenine olan mesafeler 3 kat olacak şekilde dikey uzatılarak/gerilerek çizilir)

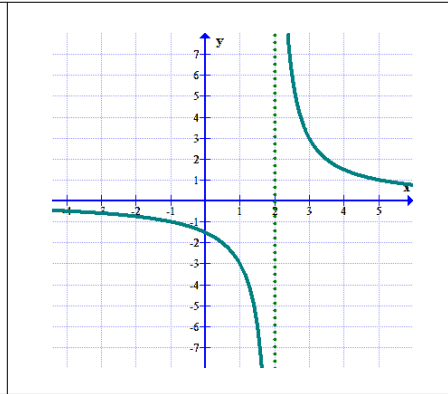
Adım 3.) x eksenine göre yansıma alınır. (şekil x eksenine göre katlanır)

Adım 4.) y eksenini boyunca negatif yönde 4 birim ötelenir ve çizim tamamlanır (4 birim aşağı kaydırılır)

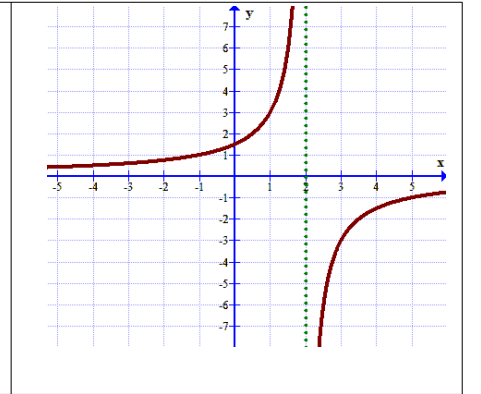
referans şekil  $f(x) = \frac{1}{x}$



Adım1 (2 birim sağa kaydırılır)



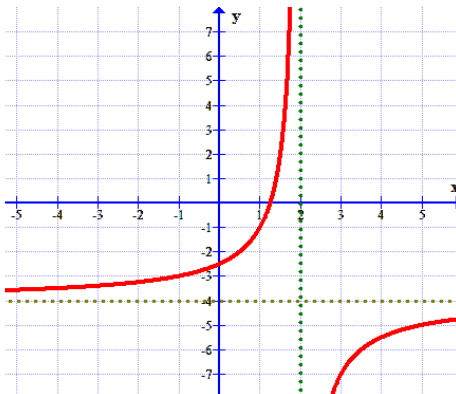
Adım2 (3 kat dikey germe)



Adım3 (x eksenine göre yansıma)

Adım4 (4 birim aşağı kaydırılır)

(grafik'in tamamlanmış hali yandadır)



$$g(x) = \frac{-3}{x-2} - 4$$

## Grafik üzerinden inceleme

- a) **Tanım ve Görüntü Kümeleri** Grafiğe göre: Tanım Kümesi  $R-\{2\}$  Görüntü Kümesi  $R-\{-4\}$   
Grafiğe göre  $x=2$  doğrusu düşey asimptot,  $y=-4$  doğrusu yatay asimptottur.
- b) **Sıfırını ve y eksenini kesim noktasını.** Grafikten y eksenini kesim noktası  $-2$  ile  $-3$  arasında, sıfırını 1 ile 2 arasındadır, **tam/kesin değerlerini denklem çözerek cebirsel yolda bulacağız.**
- c) **Artanlık ve azalanlık durumu** grafiğe göre,  $(-\infty, 2)$  ve  $(2, \infty)$  kümesindeki artan x değerlerine karşılık artan y değerleri geldiği görülmektedir. Bu sebeple fonksiyon  $(-\infty, 2)$  ve  $(2, \infty)$  aralıkları için artandır.
- d) **Maksimum ve minimumlarını** : Grafiğe göre en büyük değeri ya da en küçük değeri yoktur.
- e) **İşareti:** Fonksiyonun sıfırına  $x_1$  dersek grafiğe göre  $(x_1, 2)$  için pozitif ;  $(-\infty, x_1)$  ve  $(2, \infty)$  aralıklarında negatif değerler almaktadır.
- f) **bire birlik durumu:** Grafikte eğer x eksenine paralel (yani yatay) çizgiler çizersek grafiği daima tek noktada keseceğinden fonksiyon bire birdir.
- g) **örtün olma durumu:** Fonksiyonun değer kümesi belirtilmemiş, eğer değer kümesi  $R-\{-4\}$  ise fonksiyon örtün, eğer değer kümesi  $R$  ise fonksiyon örtün değildir çünkü fonksiyon x e verilebilecek değerler için değer kümesindeki  $-4$  değerini "üretmez". (örtün değilse "içine"dir de denir)
- h) **tek/çift olma durumu:** Grafiğe göre fonksiyonun tanım kümesi simetrik aralık değildir, ayrıca yine grafiğe göre fonksiyonun belirttiği eğrinin y eksenine ya da orijine göre simetrik olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla fonksiyon tek ya da çift değildir.

**Cebirsel inceleme** (Bu bölümü yaparken elimizde grafik olmadığını varsayıyoruz, eğer işlem yapmanıza rağmen emin olmadığınız durumlar varsa cebirsel yöntemlerle bulduğunuz sonuçları, fonksiyonun grafiğini çizip "çapraz" kontrol edebilirsiniz)

$$g(x) = \frac{-3}{x-2} - 4$$

- a) **Tanım ve Görüntü Kümeleri:** Rasyonel referans fonksiyonun elde edilen ifadeler

(genel olarak  $h(x) = \frac{a}{x+r} + k$ ,  $a \neq 0$  ifadeleri), payda sıfır olmayacak sayılar için tanımlı olduğundan  $g(x)$  fonksiyonu  $x \neq 2$  için tanımlıdır. Dolayısıyla tanım kümesi  $R-\{2\}$  olur. (ya da  $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$  yazabiliriz)

$\frac{a}{x+r}$ ,  $a \neq 0$  ifadesi 0 a eşit olamayacağından  $\frac{-3}{x-2} - 4$  ifadesi  $-4$  olamaz. Bunun dışında  $x=2$  ifadesi 0 a çok yakın değerler aldığı anda  $\frac{-3}{x-2} - 4$  ifadesi istenildiği kadar büyük ya da küçük yapılabilir.

Dolayısıyla görüntü Kümesi  $R-\{-4\}$  olur. (ya da görüntü kümesi  $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$  yazabiliriz)

- b) **Sıfırını ve y eksenini kesim noktasını.** y eksenini kesim noktası için  $x=0$  yazılır.  $g(0) = \frac{-3}{-2} - 4 = \frac{-5}{2}$  grafik y eksenini  $(0, -\frac{5}{2})$  noktasından keser.)

Fonksiyonun sıfırını bulmak için cebirsel ifadesini 0 a eşitleyip köklü denklemi çözelim

$$\frac{-3}{x-2} - 4 = 0 \rightarrow \frac{-3}{x-2} = 4 \rightarrow -3 = 4x - 8 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$
 dolayısıyla fonksiyonun sıfırını  $\frac{5}{4}$  ve x eksenini kestiği nokta  $(\frac{5}{4}, 0)$  olur.

- c) **Artanlık ve azalanlık durumu: Önce Tanım**

$\forall x_1 < x_2 \rightarrow h(x_1) < h(x_2)$  oluyorsa  $h(x)$  artan,  $\forall x_1 < x_2 \rightarrow h(x_1) > h(x_2)$  oluyorsa  $h(x)$  azalan oluyordu (Kısaca artan x değerlerine karşılık artan y değerleri geliyorsa fonksiyon artan, azalan y değerleri geliyorsa fonksiyon azalandır)

$$2 < x_1 < x_2 \rightarrow 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 \rightarrow \frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \rightarrow \frac{-3}{x_1 - 2} < \frac{-3}{x_2 - 2} \rightarrow \frac{-3}{x_1 - 2} - 4 < \frac{-3}{x_2 - 2} - 4 \rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

olduğundan  $(2, \infty)$  kümesindeki  $g(x)$  fonksiyonu artandır.

Benzer şekilde

$$x_1 < x_2 < 2 \rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 \rightarrow \frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \rightarrow \frac{-3}{x_1 - 2} < \frac{-3}{x_2 - 2} \rightarrow \frac{-3}{x_1 - 2} - 4 < \frac{-3}{x_2 - 2} - 4 \rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

olduğundan  $(-\infty, 2)$  kümesindeki  $g(x)$  fonksiyonu artandır.

(yukarıdaki ifadelerin belirlenen aralıklardaki her  $x_1, x_2$  seçimi için olduğunu unutmayınız)

d) **Maksimum ve minimumlarını** : Görüntü kümesini bulurken belirttiğimiz gibi paydadaki ifade pozitif ya da negatif taraftan sifıra yaklaştıkça kesir değeri istenildiği kadar büyük ya da küçük olabileceğinden (düşey asimptot civarını grafikten inceleyiniz) en geniş tanım kümesinde (yani  $\mathbb{R}-\{2\}$  ) tanımlı  $g(x)=\frac{-3}{x-2}-4$  fonksiyonu maksimum ya da minimuma sahip değildir. (Bu fonksiyonun tanım kümesi değişirse maksimum ya da minimumları olabileceğini unutmayın. Örneğin tanım kümesi [3,5] olursa...)

e) **İşareti**:  $g(x)$  fonksiyonun sıfırı  $\frac{5}{4}$  idi. Tablosunu yapalım.  $g(x)=\frac{-3}{x-2}-4$

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	2	$\infty$
g(x)	-----	○	+++	-----
			tanımsız	

(Tablonun x olan satırında farklı aralıklarda değerler vererek, f(x) satırındaki işaretleri bulabilirsiniz)

tabloya göre  $g(x)$  fonksiyonu  $(\frac{5}{4}, 2)$  için pozitif ;  $(-\infty, \frac{5}{4})$  ve  $(2, \infty)$  için negatiftir.

f) **bire birlik durumu**: Önce tanım  $h(x_1)=h(x_2) \rightarrow x_1=x_2$  oluyorsa (sadece  $x_1=x_2$  başka ekstra durum olmamalı) h birebirdir. (Kısaca değer farklı elemanların görüntüleri farklı olmalı ya da kırmızı yazıdaki **karşıt tersi** ifadesinde belirttiği gibi aynı "görüntüler" için tanım kümesinin aynı elemanları kullanılmış olmalı)

$g(x_1)=g(x_2)$  olsun  $\frac{-3}{x_1-2}-4=\frac{-3}{x_2-2}-4 \rightarrow \frac{-3}{x_1-2}=\frac{-3}{x_2-2} \rightarrow x_1-2=x_2-2 \rightarrow x_1=x_2$  olacağından  $g(x)$  birebirdir.

g) **örtlen olma durumu**: Önce tanım  $h: A \rightarrow B, \forall y \in B, \exists x \in A : h(x)=y$  oluyorsa h örtendir. (Kısaca değer kümesinden seçilebilecek herhangi bir değere karşılık tanım kümesinden bir değer bulunabilir) Değer kümesinden seçilecek her y için bir x bulunup bulunmayacağını kontrol edelim. Fonksiyonun değer kümesi belirtilmemiş, eğer değer kümesi  $\mathbb{R}$  ise bu kümeden seçilecek  $y=-4$  değeri için  $\frac{-3}{x-2}-4=-4 \rightarrow \frac{-3}{x-2}=0$  ve bu denklemi sağlayan bir x değeri bulunamayacağından (yani çözüm olmayacağından) fonksiyon örtlen olmaz. (değer kümesi  $\mathbb{R}$  için  $g(x)$  içindedir)

Eğer değer kümesi  $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$  ise bu aralıktan seçilecek bir y değeri için çözüm bulunabileceğini gösterelim. (yani seçilecek değere karşılık x bulunacağını gösterelim)

$\frac{-3}{x-2}-4=y \rightarrow \frac{-3}{x-2}=y+4 \rightarrow \frac{-3}{y+4}=x-2 \rightarrow \frac{-3}{y+4}+2=x$  dolayısıyla eğer  $y \neq -4$  seçersek daima bir çözüm bulabileceğimizden değer kümesi  $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$  için  $g(x)$  fonksiyonu örtendir.

h) **tek/çift olma durumu**: Önce tanım

eğer  $\forall x, h(-x)=h(x)$  oluyorsa h fonksiyonu çift fonksiyondur, eğer  $\forall x, h(-x)=-h(x)$  oluyorsa h fonksiyonu tek fonksiyondur

$g(-x)=\frac{-3}{-x-2}-4=\frac{3}{x+2}-4 \neq g(x)$  (yani fonksiyon çift fonksiyon değildir),  $g(-x) \neq -g(x)$  (yani fonksiyon tek fonksiyon değildir)

Dolayısıyla  $g(-x)=g(x)$  ya da  $g(-x)=-g(x)$  eşitlikleri sağlanmadığından  $g(x)$  tek ya da çift değildir. (Tanım kümesini bulduktan sonra da kümenin 0 sayısına göre simetrik olmaması sebebiyle de  $g(x)$  fonksiyonu tek ya da çift değildir diyebilirdik)