

LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 11

$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(n)=a_n$ şeklinde tanımlanan fonksiyona reel sayı dizisi denir.

(a_n) bir dizi ve $n \rightarrow \infty$ için genel terim a_n bir L reel sayısına yaklaşıyorsa (a_n) dizisinin limiti L dir denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ şeklinde gösterilir.

$f(n)=a_n$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$

Dizi limitinde $n \rightarrow \infty$ ifadesi yazılmayabilir.

Örnek...1:

Aşağıdaki dizilerin limitleri var ise bulunuz

a) $(a_n) = \left(\frac{3n+6}{2n+5} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+6}{2n+5} \right) = \frac{3}{2}$
denklemci eşit, $\frac{\infty}{\infty}$, bölme baki oranı $\uparrow$

b) $(a_n) = \left(\frac{2n^2+3n+1}{4n^2-1} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $\frac{\infty}{\infty}$

c) $(a_n) = \left(\frac{\pi n^3 - 2n}{e n^3 + 1} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi/e$
 $\frac{\infty}{\infty}$

d) $(a_n) = \left(\frac{n^4 - 2n}{\sqrt{2} n^5 + 1} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $\frac{\infty}{\infty}$

e) $(a_n) = \left(\frac{\pi n^2 - 2n}{n+7} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
 $\frac{\infty}{\infty}$

f) $(a_n) = \left(\frac{\pi^n - 2^n + 5}{e^n + 4^n - 8} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\infty}{\infty}$

$\frac{\pi^n \left(1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^n + \frac{5}{\pi^n} \right)}{4^n \left(\left(\frac{e}{4} \right)^n + 1 - 8/4^n \right)} = \left(\frac{\pi}{4} \right)^n \rightarrow 0 //$

g) $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{2n+6} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1^\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} \right) \cdot 2n+6 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+6}{n+2} = 2$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2 //$

h) $(a_n) = (\sqrt{n^2+6n-1} - \sqrt{n^2-4n+201})$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty - \infty$

$\sqrt{n^2+6n+1} \sim |n+3| = n+3$

$\sqrt{n^2-4n+201} \sim |n-2| = n-2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = n+3 - (n-2) = 3+2 = 5 //$

i) $(a_n) = 2n \cdot \left(\sin \frac{3}{n} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \cdot 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot \sin \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\sin \frac{3}{n}}{\frac{1}{n}} = 2 \cdot \frac{0}{0}$
 $\frac{1}{n} \rightarrow 3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \cdot 3 = 6 //$

j) $(a_n) = \left(\frac{-2n! + 72^n + 1}{n^n + \ln(n)} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\infty}{\infty}$

payda daha büyük $(n^n > n!)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Hatırlatma: $x^x > x! > n^x > x^n > x > \log x \quad x \rightarrow \infty$

LİMİT - 11

(BİR DİZİNİN LİMİTİ)

Örnek...2 :

$a_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} \right)$ genel terimiyle verilen dizinin limiti nedir?

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1} = 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

HATIRLATMA

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Örnek...3 :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = ?$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$n \rightarrow \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Örnek...4 :

Birinci terimi 24 ve ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan geometrik dizinin kısmi toplamı (ilk n terim toplamı) dizisinin limiti kaçtır?

$$24, 24 \cdot \frac{1}{2}, 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \dots, 24 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$24 + 24 \cdot \frac{1}{2} + 24 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots + 24 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$24 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$$

$$24 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \Rightarrow \text{limit alınca}$$

$$24 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 48$$

Örnek...5 :

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k = ?$ $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Örnek...6 :

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4^k + 2}{5^k} \right) = ?$ $\sum \left(\frac{4}{5} \right)^k + \frac{2}{5^k}$

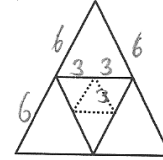
$$\left(1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5} \right)^2 + \dots \right) + \left(2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{4}{5}} + 2 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \right)$$

$$5 + 2 \cdot \frac{5}{4} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

Örnek...7 :

Bir kenarı 12 cm olan eşkenar üçgeninin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek iç içe yeni eşkenar üçgenler elde ediliyor. Oluşan üçgenlerin



a) toplam çevreleri kaç birimdir?

b) toplam alanları kaç birim karedir?

$$a) 3 \cdot 12 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + \dots = 36 + 18 + 9 + \dots = 36 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \right)$$

$$36 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 36 \cdot 2 = 72$$

$$b) \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} + \dots = 36 \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

$$36 \sqrt{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 36 \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = 48 \sqrt{3}$$

LİMİT - 11

(BİR DİZİNİN LİMİTİ)

DEĞERLENDİRME

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{3}{16^x}) = ?$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{16^x} = 0$

$3(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^x}) = 3(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}})$

$= 3 \cdot \frac{4}{3}$

$= 4$

2) $(a_n) = (2+3n) \cdot (\tan \frac{7}{2n})$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \cdot 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2+3n) \cdot \tan \frac{7}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{7}{2n} + 3n \cdot \tan \frac{7}{2n})$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 3n \cdot \tan \frac{7}{2n} = 3 \cdot 7 = 21$

- 3) Bir top 72 m yükseklikten bırakılıyor ve yere her çarpışında bir önceki yüksekliğinin 2/3 ü kadar yükseliyor. Topun durana kadar aldığı ~~yol~~ ^{dikey} yol kaç birimdir?

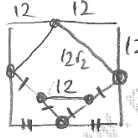


$72 + 2 \cdot 72 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 72 \cdot (\frac{2}{3})^2 + \dots$

$72 + 96(1 + \frac{2}{3} + \dots) = 72 + 96 \cdot (\frac{1}{1 - \frac{2}{3}})$

$72 + 96 \cdot 3 = 360$

- 4) Bir kenarı 24 cm olan karenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir kare elde ediliyor. Bu işlem sonsuz kere tekrar ediliyor. Elde edilen karelerin alanları toplamı kaç birim karedir?



$24^2 + (12\sqrt{2})^2 + \dots$

$24^2(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots)$

$24^2(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}) = 24^2 \cdot 2$

- 5) $4.\bar{6}$ devirli sayısının değerini bulunuz

$4 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \dots$

$4 + \frac{6}{10}(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots)$

$4 + \frac{6}{10}(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}) = 4 + \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{9}$

$= 4 + \frac{6}{9} = \frac{14}{3}$

- 6) $(4.\bar{6})_9$ devirli ~~ondalık~~ sayısının değerini bulunuz. (9 sayı tabanıdır.)

$4 + 6 \cdot 9^{-1} + 6 \cdot 9^{-2} + 6 \cdot 9^{-3} + \dots$

$4 + \frac{6}{9}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots)$

$4 + \frac{6}{9}(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}}) = 4 + \frac{6}{9} \cdot \frac{9}{8}$

$= 4 + \frac{6}{8} = \frac{19}{4}$

- 7) $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (\frac{2}{3})^{k-1} = ?$ A olsun.

$A = 1 \cdot (\frac{2}{3})^0 + 2 \cdot (\frac{2}{3})^1 + 3 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 4 \cdot (\frac{2}{3})^3 + \dots$

$\frac{2}{3}A = (\frac{2}{3})^1 + 2 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 3 \cdot (\frac{2}{3})^3 + \dots$

$A - \frac{2}{3}A = (\frac{2}{3})^0 + (\frac{2}{3})^1 + (\frac{2}{3})^2 + \dots$

$\frac{A}{3} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{A}{3} = 3 \Rightarrow A = 9$