

# ANALİTİK GEOMETRİ

## ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

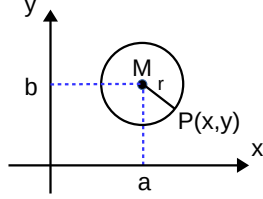
### TANIM

Bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri **düzlemde çember** belirtir.

### ÇEMBERİN STANDART VE VEKTÖREL DENKLEMİ

$M(a,b)$  ve  $P(x,y)$  noktaları arasındaki uzaklık kullanarak çemberin standart denklemi  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  olarak elde edilir.

$\|\overline{MP}\| = r$  ise  $M$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı çemberin vektörel denklemidir.



### Örnek...1 :

$M(3,5)$  ve yarıçapı 4 birim olan çemberin standart denklemini yazınız.

### Örnek...2 :

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$  çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

### MERKEZİL ÇEMBER :

Merkezi orijinde olan çemberlere denir. Yani  $M(0,0)$  ve yarıçapı  $r$  ise çemberin denklemi  $x^2 + y^2 = r^2$  biçimindedir.

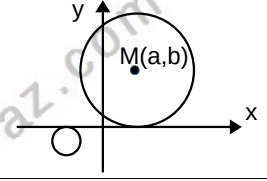
### Örnek...3 :

$(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = 40$  çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

### EKSENLERE TEĞET ÇEMBERLER :

$x$  eksenine teğet çemberler :

$|b| = r$  dir.



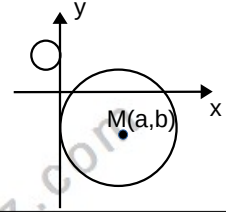
### Örnek...4 :

$M(4,-6)$  merkezli ve  $x$  eksenine teğet çemberin denklemini yazınız

### Y EKSENİNE TEĞET ÇEMBERLER :

$y$  eksenine teğet çemberler :

$|a| = r$  dir.



### Örnek...5 :

$M(4,-6)$  merkezli ve  $y$  eksenine teğet çemberin denklemini yazınız?

### UYARI

Bir çember her iki eksene teğet ise merkezi 1. veya 2. açıortay doğrusu üzerindedir. (Bu önermenin karşıtı doğru değildir.)

Her iki eksene teğet çemberde  $M(a,b)$  merkez ise  $|b| = |a| = r$  dir.

### Örnek...6 :

$(x + 5)^2 + (y - p)^2 = r$  çemberi her iki eksene de teğetse  $p$  r en az kaçtır?

## ANALİTİK GEOMETRİ

### ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

#### Örnek...7 :

Merkezi  $3y+x=4$  doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene teğet olan çemberlerin merkezlerini ve yarıçaplarını bulunuz? Bu çemberler arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

#### Örnek...8 :

$A(-2,3)$  noktasından geçen ve iki eksene de teğet olan çemberin yarıçapı kaç olabilir?

#### Örnek...9 :

$3x-4y=0$  ile  $4y-3x+15=0$  doğrularına teğet çemberin ve merkezi  $y=3$  doğrusu üzerinde olan çemberin denklemi nedir?

### ÇEMBERİN GENEL DENKLEMİ

$M(a, b)$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı çemberin denklemi  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  idi.

Bu denklemi açıp düzenlersek

$$x^2 + y^2 - 2.a.x - 2.b.y + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \text{ olur.}$$

$$- 2.a=A \quad -2.b=B \text{ ve } a^2 + b^2 - r^2 = C \text{ diyelim.}$$

$$x^2 + y^2 + A.x + B.y + C = 0$$

Buradan şu eşitlikleri elde ederiz :

$$M(a, b) = M\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4.C} \quad \Delta = A^2 + B^2 - 4.C \text{ (Delta)}$$

Uyarı: Çember denkleminde yukarıdaki bağıntıların kullanılabilmesi için

1.  $x^2$  ve  $y^2$  li terimlerin katsayısı 1 olmalı
2. denkleminde  $x.y$  li terim bulunmamalı
3.  $\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$  olmalıdır.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$  ise bir çember belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C = 0$  ise bir nokta belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C < 0$  ise çember belirtmez.

Bunu sanal çember belirtir şeklinde de söyleriz.

#### Örnek...10 :

$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$  çemberinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

#### Örnek...11 :

$3x^2 + 3y^2 + 12x - 8y - 5 = 0$  çemberinin merkezini bulunuz.

## ANALİTİK GEOMETRİ

### ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

#### Örnek...12 :

$(2m-1)x^2 + (m+1)y^2 - (n-6)x.y + 6nx - n - 9 = 0$  denklemi bir çember belirtiyor ise bu çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

#### Örnek...13 :

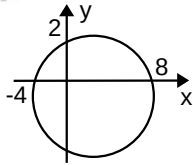
$(m-2)x^2 + (4-m)y^2 + (n-5)xy + 2mx - ny - mn = 0$  denklemi bir çember belirttiğine göre merkezini ve yarıçapını bulunuz.

#### Örnek...14 :

$x^2 + y^2 - 8x + 9y - 20 = 0$  çemberinin x-ekseninden ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

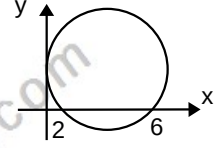
#### Örnek...15 :

Şekilde verilen çemberin denklemini yazınız.



#### Örnek...16 :

Şekilde verilen y-eksenine teğet çemberin denklemini yazınız.

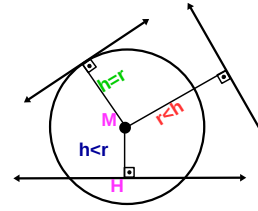


#### Örnek...17 :

A(0,5) B(-12,0) ve K(0,0) noktalarından geçen çemberin denklemini nedir?

www.matbaz.com

### ÇEMBER İLE DOĞRUNUN DURUMLARI :



Çember ve doğrunun kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezin doğruya uzaklığı ile yarıçap karşılaştırılır:

Durum 1)  $|MH| > r$  doğru çemberi kesmez

Durum 2)  $|MH| = r$  doğru çember teğettir

Durum 3)  $|MH| < r$  doğru çember iki noktada kesişir.

### NOT

Çember ve doğrunun kesim noktalarını bulmak için ortak çözüm yaparız.

## ANALİTİK GEOMETRİ

### ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

#### Örnek...18 :

Analitik düzlemde  $(x+3)^2+y^2=5$  çemberi ile  $y-2x=p$  doğrusu teğet ise  $p$  nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

#### Örnek...19 :

Analitik düzlemde  $x^2+y^2=r^2$  çemberi ile  $3x-4y=10$  doğrusu teğet ise  $r$  kaçtır?

#### Örnek...20 :

$(x-3)^2+(y+1)^2=16$  çemberi ile  $4x-3y+k=0$  doğrusunun iki noktada kesişmesi için  $k$  ne olmalıdır?

#### Örnek...21 :

$(x+1)^2+(y-1)^2=18$  çemberi ile  $y=x-m$  doğrusunun kesişmemesi için  $m$  ne olmalıdır?

#### Örnek...22 :

$x^2-2x+y^2-6y-8=0$  çemberinin  $x$  ekseninde ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

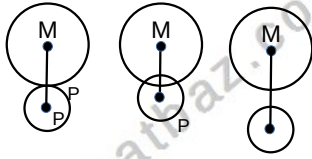
#### Örnek...23 :

$x^2-2x+y^2-4y-11=0$  çemberinin  $y=x+1$  doğrusuyla kesim noktaları  $A$  ve  $B$  olsun.  $|AB|$  kaç birimdir?

#### Örnek...24 :

Analitik düzlemde  $x^2+y^2=6$  merkezli çemberi ile  $y=3x-1$  doğrusunun kesim noktalarının apsisi toplamı kaçtır?

### İKİ ÇEMBERİN DURUMLARI



İki çemberin kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezler arası doğru ile yarıçap toplamı veya farkı karşılaştırılır.

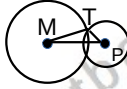
durum 1  $|MP|=r_m+r_p$  çemberler dıştan teğet

durum 2  $|MP|=|r_m-r_p|$  çemberler içten teğet

durum 3  $|r_m-r_p|<|MP|<r_m+r_p$  çemberler iki noktada kesişir

durum 3  $|MP|<|r_m-r_p|$  veya  $|MP|>r_m+r_p$  çemberler kesişmezler

### Dik kesişen çemberler



Kesim noktalarındaki teğetleri dik olan çemberlere dik kesişiyorlar denir.

Yukarıdaki şekilde merkezler  $m(\widehat{MTP})=90^\circ$  ise çemberler dik kesişmiştir.

### Örnek...25 :

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 225 \text{ ve}$$

$$(x-7)^2 + (y-k)^2 = 4$$

çemberleri içten teğet ise k kaç olabilir?

### Örnek...26 :

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \text{ ve}$$

$$(x+1)^2 + (y-k)^2 = 49$$

çemberleri dıştan teğet ise k değerleri çarpımı kaç olabilir?

### Örnek...27 :

$$(x-3)^2 + y^2 = 16 \text{ ve}$$

$$(x+1)^2 + (y-m)^2 = 9$$

çemberleri dik kesiştiğine göre m değerleri toplamı kaç olabilir?

### ÇEMBER İLE NOKTANIN DURUMLARI

O(a,b) merkezli ve r yarıçaplı  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  çemberi ile çember ile aynı düzlemde bulunan  $P(x_0, y_0)$  noktası için  $|OP|^2 - r^2$  değerine P noktasının bu çembere göre kuvveti denir.

$|OP|^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$  olacağından bu hesaplama çember denklemi  $F(x,y)=0$  biçimine getirildikten sonra P noktasının koordinatları  $F(x,y)$  kısmında yazılarak hesaplanmalıdır.

**Durum 1**  $F(x_0, y_0)=0$  P noktası çemberin üzerindedir

**Durum 2**  $F(x_0, y_0)>0$  P noktası çemberin dışındadır

**Durum 3**  $F(x_0, y_0)<0$  P noktası çemberin içindedir

**Not 1:**  $F(x_0, y_0)>0$  ise bu hesaplama sonucu bulunan pozitif sayı çembere P noktasından çizilen teğet uzunluğunun karesidir.

**Not 2:** Negatif kuvvetin mutlak değeri ise bu noktada ile iki parçaya ayrılan kiriş parçalarının sabit olan çarpım değeridir.

## ANALİTİK GEOMETRİ

### ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

#### Örnek...28 :

P(6, 4) noktasından  $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 20 = 0$  çemberine göre kuvvetini bulup kuvveti yorumlayınız.

#### Örnek...29 :

P(2, -3) noktasından  $x^2 + y^2 - 3x - 5y + k = 0$  çemberine çizilen teğetin değme noktası T ve IPTİ = 7 ise k = ?

#### Örnek...30 :

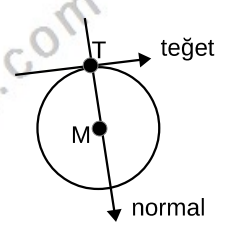
A(-1, 2) noktasından geçen bir doğru  $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 12$  çemberini K ve L noktalarında kesiyor. |AK|. |AL| çarpımı kaçtır?

#### Örnek...31 :

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 41$  çemberinin A(1,2) noktasından geçen en kısa kirişinin uzunluğu kaç birimdir?

#### TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ :

$x^2 + y^2 = r^2$  çemberine üzerindeki  $T(x_0, y_0)$  noktasından çizilen teğetin denklemi  $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = r^2$  dir.



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  çemberine üzerindeki  $T(x_0, y_0)$  noktasından çizilen teğetin denklemi  $(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = r^2$  dir. Bu bağıntıları kullanmak yerine iki noktası bilinen doğru denklemi, diklik koşulu ve standart doğru denklemi kullanarak teğet ve normal denklemlerini bulabiliriz

#### Örnek...32 :

$(x + 3)^2 + y^2 = 34$  çemberine A(2,-3) noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

#### Örnek...33 :

$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$  çemberinin A(1,1) noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemi nedir?

## ANALİTİK GEOMETRİ

### ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

#### Örnek...34 :

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$  çemberinin  $A(-2, -4)$  noktasından geçen teğetinin denklemini bulunuz?

#### DEĞERLENDİRME

1)  $(3x - 8)^2 + (3y + 1)^2 = 36$  çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

2)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$  çemberi üzerindeki bir noktanın  $A(-4, 5)$  noktasına uzaklığı en az kaç birimdir?

3)  $A(2, -1)$  noktası  $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$  çemberinin neresindedir?

4)  $B(-2, 1)$  noktası  $x^2 + y^2 - (m+1).x + 4y + 1 = 0$  çemberinin dışında olduğuna göre  $m$ ' nin alacağı en küçük tam sayı değeri kaçtır?

5)  $A(3, 12)$  noktasına uzaklığı  $B(-5, 1)$  noktasına uzaklığının yarısı olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

## ANALİTİK GEOMETRİ

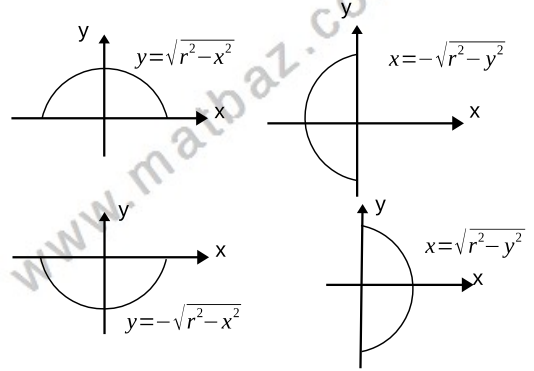
### ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

- 6)  $A(4, 2)$  noktasının  $2x - m.y + 3y + 8 = 0$  doğrularına göre simetrilerinin geometrik yerini bulunuz.

- 7) Verilen bir  $A$  noktasının verilen bir  $S$  noktasından geçen doğrulara göre simetrikleri ne belirtir?

- 8)  $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 40$  çemberi içindeki  $P(2, -2)$  noktasından geçen kirişlerin orta noktalarının geometrik yer denklemini yazınız.

- 9) Standart çember denklemini kullanarak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz



Yukarıda verilenlere göre aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a)  $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$

b)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1-x^2} - x) dx$