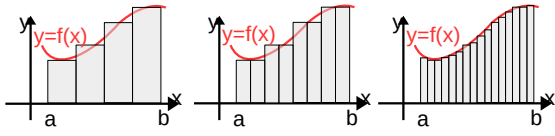


İNTEGRAL-5

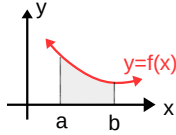
ALAN HESABI

İNTEGRAL İLE ALAN HESABI



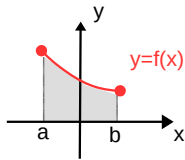
Şekilde $y=f(x)$ eğrisiyle x ekseninde kalan alanı bulmak için eğrinin altında kalan bölgeyi dikdörtgenlere ayırır ve bu alanları toplayarak bir Riemann toplamı elde ederiz. Elde edilen Riemann toplamına integral hesabın temel teoremini uygulayarak aşağıdaki sonuçları çıkarırız

ALAN HESABI



$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli f fonksiyonu ile $x=a$, $x=b$ ve Ox ekseninde kalan bölgenin alanı $\int_a^b \|f(x)\| dx$ ile hesaplanır.

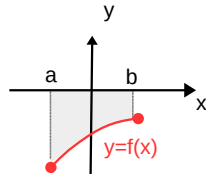
Taralı alan $\int_a^b f(x) dx$



UYARI 1

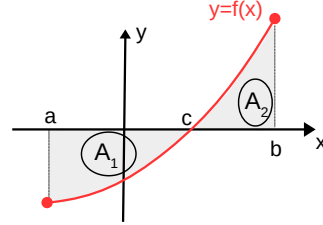
Not $f(x) < 0$ ise

Taralı alan $-\int_a^b f(x) dx$



UYARI 2

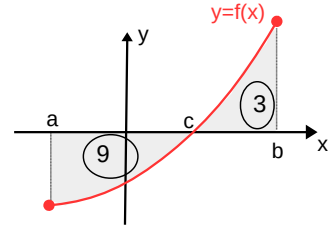
$[a,b]$ aralığında $f(x)$ işaret değiştiriyorsa, fonksiyon parçalara ayrılır



Taralı toplam alan $= A_1 + A_2$
$$= \int_a^b |f(x)| dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

UYARI 3

Şekildeki taralı bölgelerin alanları verilmiştir



Soru 1 $\int_a^b f(x) dx = ?$

İstenen alanların işaretli (cebirel) toplamı olup cevap $-9+3=-6$ olur

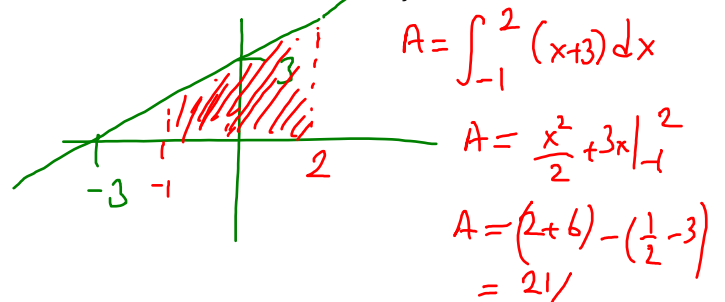
Soru 2 $[a,b]$ aralığında Ox eksenine ve $y=f(x)$ eğrisiyle sınırlı alan kaç br^2 dir?

İstenen toplam alanlar olup integrale ifadesi $\int_a^b |f(x)| dx$ ve eşiği $9+3=12$ olur

Alan sorularını çözmek için uygun şekli çizeriz, gerekirse integralleri parçalar ve uygun aralıklarda integralleri hesaplarız

Örnek...1 :

$y=x+3$ doğrusu $x=-1$, $x=2$ doğruları ve x ekseninde kalan alan kaç br^2 dir?

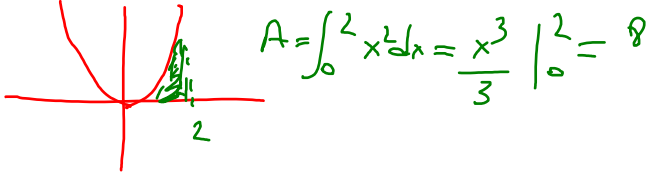


İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

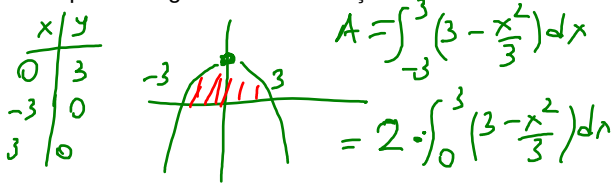
Örnek...2 :

$y = x^2$ parabolü, $y = 0$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı kapalı bölgenin alanı kaç br² ?



Örnek...3 :

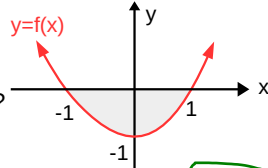
$y = 3 - \frac{x^2}{3}$ eğrisi ile ox ekseninde kalan kapalı bölgenin alanı kaç br² dir?



$$2 \cdot \left(3x - \frac{x^3}{9} \Big|_0^3 \right) = 12 \text{ br}^2$$

Örnek...4 :

Şekildeki $y=f(x)$ parabolü ve x ekseninde kalan taralı alan kaç birim karedir?



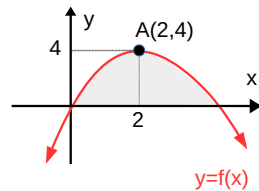
$f(x) = A(x+1)(x-1)$ $-1 = -A$ $A=1$
 $f(x) = x^2 - 1$

$$-\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = -2 \cdot \int_0^1 (x^2 - 1) dx$$

$$= -2 \left(\frac{x^3}{3} - x \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{3} \text{ birim kare}$$

Örnek...5 :

Şekildeki tepe noktası A olan $y=f(x)$ parabolü ile x ekseninde kalan alan kaç birim karedir?



$y = a(x-2)^2 + 4$
 $0 = 4a + 4 \rightarrow a = -1$
 $y = -(x-2)^2 + 4$

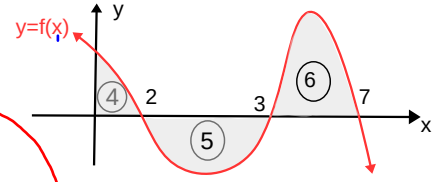
$$A = \int_0^4 [-(x-2)^2 + 4] dx = -\frac{(x-2)^3}{3} + 4x \Big|_0^4$$

$$= \frac{40}{3} - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

Örnek...6 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu

için $\int_0^2 x \cdot f(x^2+3) dx = ?$



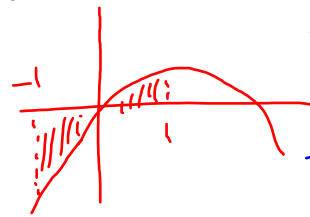
$u = x^2 + 3$
 $du = 2x dx$

x	0	2
u	3	7

$$\int_3^7 \frac{f(u)}{2} du = \frac{6}{2} = 3$$

Örnek...7 :

$y = 9x - x^2$ eğrisi $x = -1$ ve $x=1$ doğruları ve ox ekseninde kalan bölgenin alanı kaç br² dir.



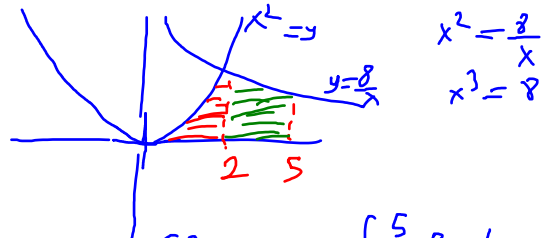
$$A = \int_{-1}^0 (x^2 - 9x) dx + \int_0^1 (9x - x^2) dx$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$-(-\frac{1}{3} - \frac{9}{2}) + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9}{2}$$

Örnek...8 :

$y=x^2$, $y=\frac{8}{x}$ ve $x=5$ doğrusu ve x ekseninde kalan alanı hesaplayınız



$$\int_0^2 x^2 dx + \int_2^5 \frac{8}{x} dx$$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + 8 \ln x \Big|_2^5$$

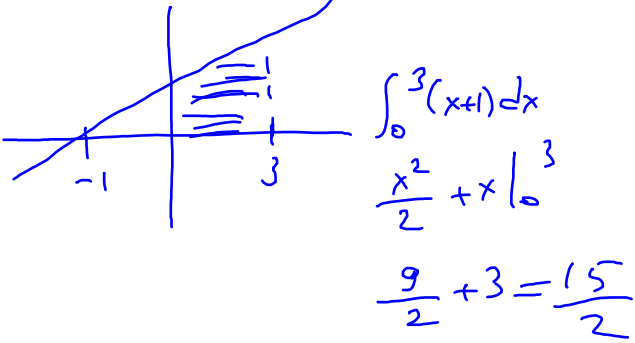
$$\frac{8}{3} + 8 \ln \frac{5}{2}$$

İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

DEĞERLENDİRME 1

- 1) $y=x+1$ doğrusu $x=0$, $x=3$ doğruları ve x eksenini arasında kalan alan kaç br² dir?



- 2) Şekildeki $y=f(x)$ parabolü ve x eksenini arasında kalan alan kaç birim karedir?

$$y = a(x+2)^2$$

$$8 = 4a \quad a = 2$$

$$A = \int_{-2}^0 2(x+2)^2 dx = \frac{2(x+2)^3}{3} \Big|_{-2}^0$$

$$= \frac{16}{3}$$

- 3) Şekildeki tepe noktası $T(3,6)$ olan $y=f(x)$ parabolü ile $x=2$ ve $x=4$ ve x eksenini arasında kalan alan kaç birim karedir?

$$y = a(x-3)^2 + 6$$

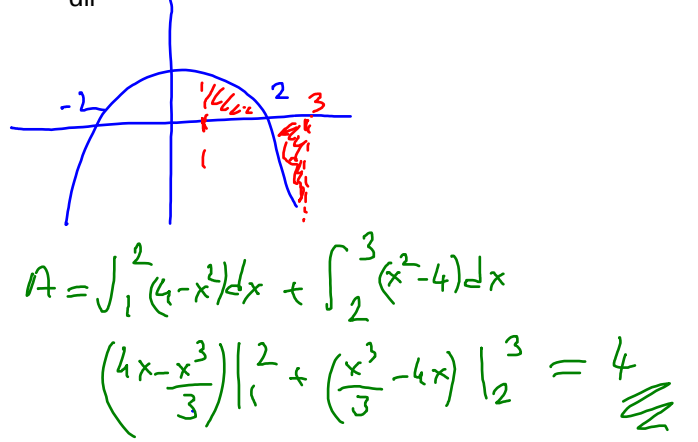
$$7 = 9a + 6$$

$$a = \frac{1}{9}$$

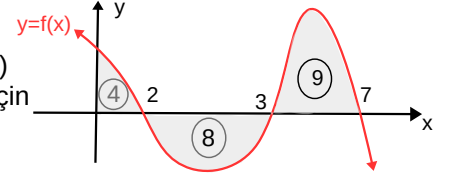
$$\int_2^4 \left(\frac{1}{9}(x-3)^2 + 6 \right) dx = \frac{(x-3)^3}{27} + 6x \Big|_2^4$$

$$12 - \frac{2}{27}$$

- 4) $y = 4 - x^2$ eğrisi $x = 1$ ve $x=3$ doğruları ve Ox eksenini arasında kalan bölgenin alanı kaç br² dir

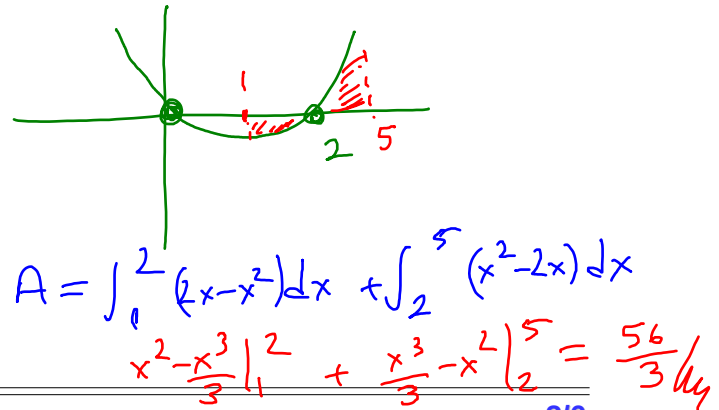


- 5) Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için $\int_0^7 f(x) dx$



$$\int_0^7 f(x) dx = 4 - 8 + 9 = 5$$

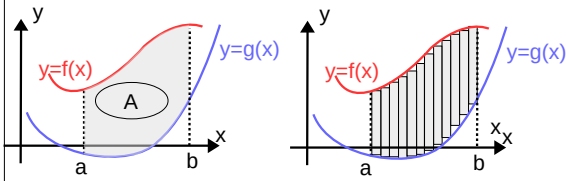
- 6) $y=x^2-2x$ parabolü $x=1$ ve $x=5$ doğruları ve x eksenini arasında kalan alanı hesaplayınız.



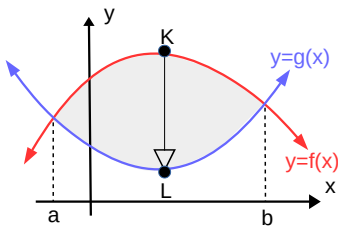
İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALAN



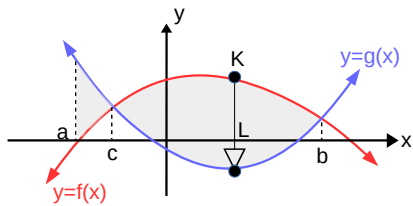
İki eğri arası alan bulunurken grafikler arasındaki alan yine dikdörtgenlere bölünerek alan Riemann toplamına dönüştürülür.



Genel olarak eğriler arasındaki alanı bulmak için grafikler çizildikten sonra Oy eksenine paralel KL şeridi çizilir. Bu şeridi kendisine paralel olarak kaydırarak bölgeyi taradığımızda üst ve hep $y = f(x)$ eğrisi üzerinde alt ucu da hep $g(x)$ eğrisi üzerinde değişmesi gerekir. Şekli inceleyiniz

Bu durumda alan $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ olur.

Aksi takdirde integrali parçalamak gerekir

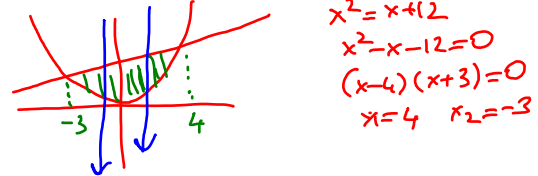


Taralı alanlar toplamı

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$

Örnek...9 :

$y = x^2$ eğrisi ile $y = x + 12$ doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

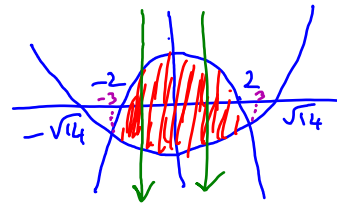


$$\begin{aligned} x^2 &= x + 12 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \\ x_1 &= 4 \quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

$$A = \int_{-3}^4 (x+12 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 12x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^4 = \frac{343}{6}$$

Örnek...10 :

$y = x^2 - 14$ ve $y = 4 - x^2$ parabolleri arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir

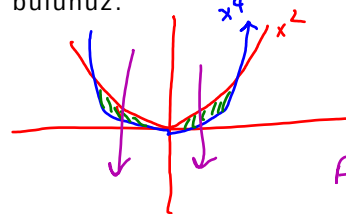


$$\begin{aligned} x^2 - 14 &= 4 - x^2 \\ 2x^2 &= 18 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$A = \int_{-3}^3 [4 - x^2 - (x^2 - 14)] dx = \int_{-3}^3 (18 - 2x^2) dx = 72$$

Örnek...11 :

$y = x^2$ ve $y = x^4$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.



$$\begin{aligned} x^2 &= x^4 \\ x^2(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, \pm 1 \end{aligned}$$

$$A = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{4}{15}$$

İNTEGRAL-5

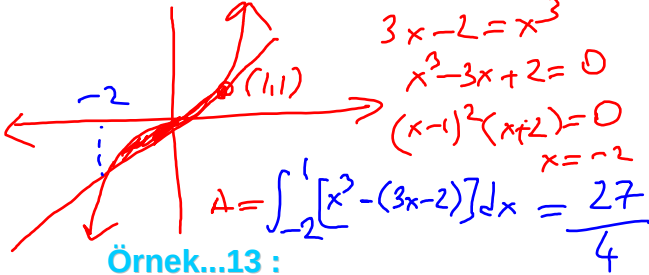
ALAN HESABI

Örnek...12 :

$y=x^3$ ve bu eğriye $x=1$ de çizilen teğeti arasında kalan bölgenin alanını

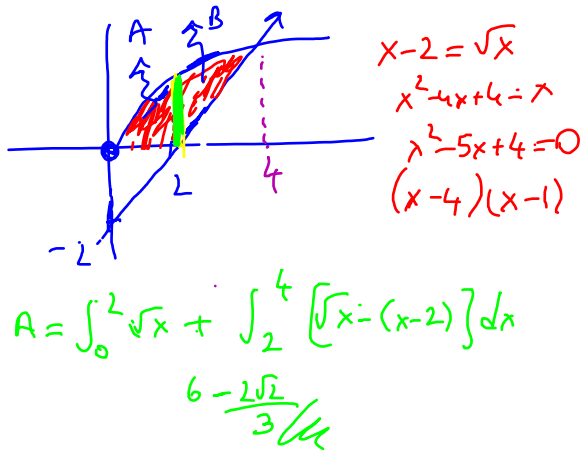
$$m_t = f'(1) = 3 \quad \text{Nokta } (1,1) \quad f'(x) = 3x^2$$

$$y-1 = 3(x-1) \quad y = 3x-2$$



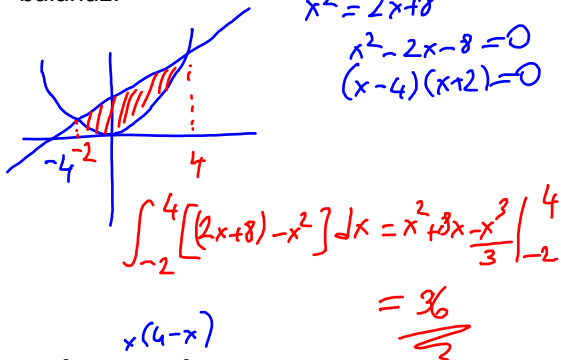
Örnek...13 :

$y = \sqrt{x}$ ve $y=x-2$ doğrusu ve x eksenini arasında kalan alanı bulunuz.

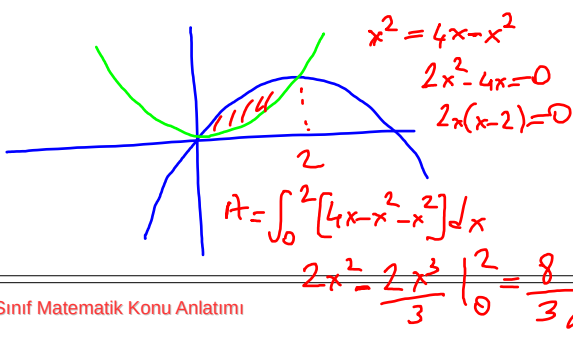


DEĞERLENDİRME

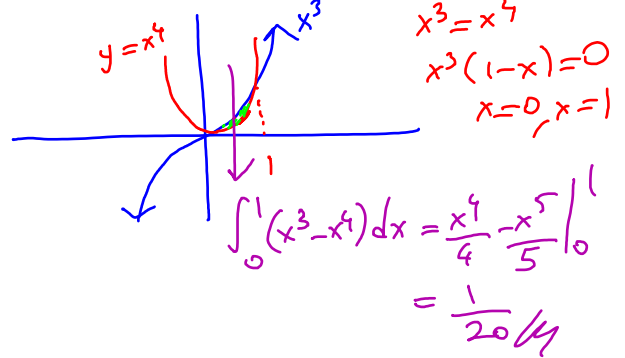
- 1) $y=x^2$ veya $y=2x+8$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.



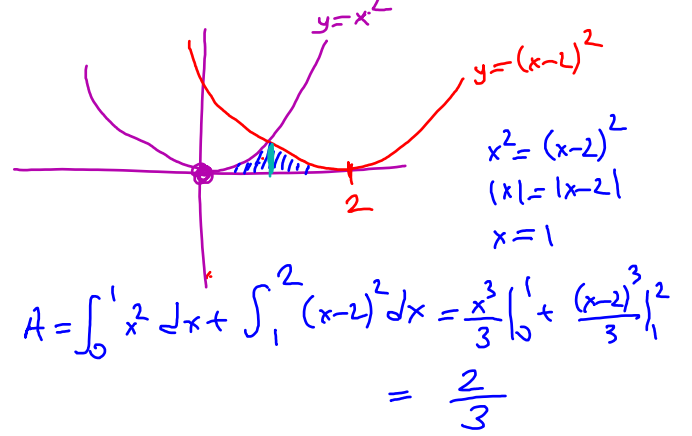
- 2) $y=x^2$ veya $y=4x-x^2$ arasında kalan alanı bulunuz.



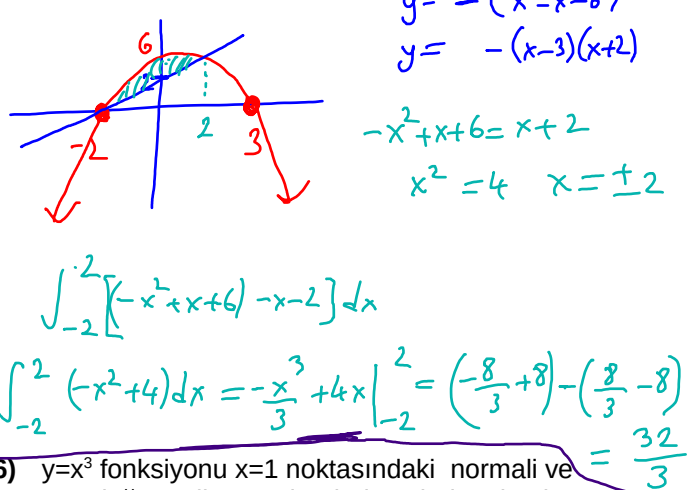
- 3) $y=x^3$ veya $y=x^4$ arasında kalan alanı bulunuz.



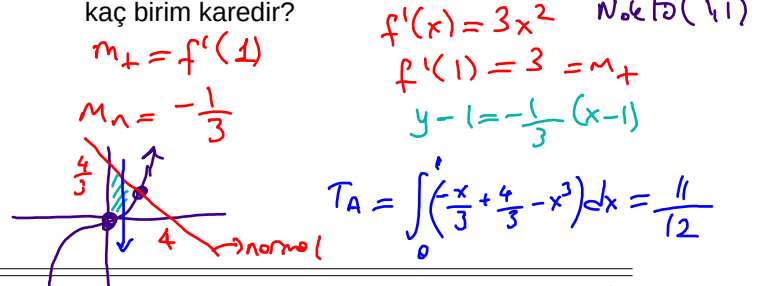
- 4) $f(x)=x^2$ ve $g(x)=(x-2)^2$ ile x eksenini arasında sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir.



- 5) $y=-x^2+x+6$ ile $y=x+2$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.



- 6) $y=x^3$ fonksiyonu $x=1$ noktasındaki normali ve $x=0$ doğrusu ile sınırlanmış bölgenin alanı kaç birim karedir?



İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

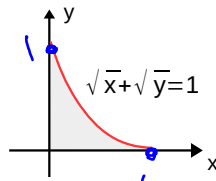
- 7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ bağıntısıyla birinci bölgede sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$$

$$y = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

$$A = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx$$

$$x - \frac{2 \cdot x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

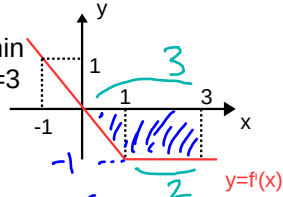


- 8) Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. $f(0)=3$ ise $f(3)$ kaçtır?

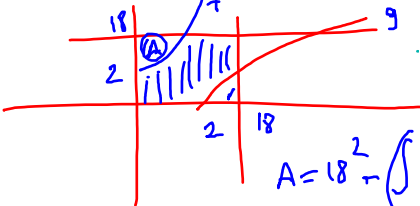
$$\int_0^3 f'(x) dx = f(3) - f(0) = -\frac{5}{2}$$

$$f(3) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{3+2}{2}\right) \cdot 1 = \frac{5}{2}$$



- 9) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 2$ fonksiyonları ve $x=18$ ile $y=18$ doğruları ve eksenler arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?



$$A = 18^2 - \int_2^{18} \sqrt{x-2} dx + \int_0^4 [18 - (x^2 + 2)] dx$$

$$= 324 - \left[\frac{(x-2)^{3/2}}{3/2} \Big|_2^{18} + \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 \right] = \frac{716}{3}$$

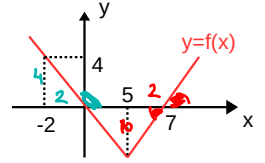
- 10) Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

$$\int_{-2}^7 |f'(x)| dx \text{ kaçtır?}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & x < 5 \\ +5 & x > 5 \end{cases}$$

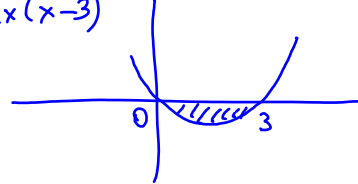
$$\int_{-2}^5 (4+2) dx + \int_5^7 5 dx$$

$$+ 2x \Big|_{-2}^5 + 5x \Big|_5^7 = 14 + 10 = 24$$



- 11) $\int_0^a (2x^2 - 6x) dx$ integralinin alacağı sayısal sonuç en az kaçtır?

$$2x(x-3)$$



$$a=3 \text{ için}$$

$$\int_0^3 (2x^2 - 6x) dx$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + c \Big|_0^3$$

$$18 - 27 = -9 \text{ (min)}$$