

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

BELİRSİZ İNTEGRAL

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in A$ için
türevlenebiliyor ise $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ olur.

$df(x) = f'(x) \cdot dx$ ifadesine f fonksiyonun
diferansiyeli denir

Bu ifade $dy = f'(x) \cdot dx$ olarak da yazılabilir.

Örnek...1 :

$y = x^2 + 3x + 5$ fonksiyonunun diferansiyeli, dy nedir?

$$dy = (2x + 3) dx$$

Örnek...2 :

$x = (t^2 + 3t - 2)^3$ ise dx nedir?

$$dx = 3(t^2 + 3t - 2)^2 \cdot (2t + 3) dt$$

İntegral alma işlemi türevi veya
diferansiyeli belli olan fonksiyonun
kendisini (ilkeli) bulmak için yapılan
işlemdir.

Türevi $f(x)$ olan $F(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ in
belirsiz integrali (ilkeli) denir.

Yani $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$ ye $f(x)$ in ilkeli
denir ve bu

$\int f(x) dx = F(x) + c$ ile gösterilir.

Integral
sembolü $\int$ integrand $f(x)$ ilkeli $F(x)$ integral
değişkeni dx integral
sabit $+c$

Örneğin $\int 2x dx = x^2 + c$

İNTEGRAL ALMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int f(k) dk = \int f(m) dm \dots$$

TEMEL BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA KURALLARI

Birçok ilkel türeve ait kuralların tersine
çevrilmesiyle elde edilir. Bunların bazıları
şöyledir :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

Örnek...3 :

$$\int x^2 dx = ? \Rightarrow \frac{x^3}{3} + c$$

Örnek...4 :

$$\int dx = ? \Rightarrow x + c$$

Örnek...5 :

$$\int \frac{1}{x^3} dx = ? \Rightarrow \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

Örnek...6 :

$$\int \sqrt{x} dx = ? \Rightarrow \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$$

Örnek...7 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx = ? \Rightarrow \int x^{-3/4} dx = 4 x^{1/4} + c$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...8 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{3/2} \sqrt{x}} dx = ? \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{3/2} \sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[5]{3/2}} + C$$

Örnek...9 :

$$\int (x+x^3-4) dx = ? \quad \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 4x + C$$

Örnek...10 :

$$\int \left(\sum_{k=0}^2 (k+1)x^k \right) dx = ? \quad \int (1+2x+3x^2) dx = x + x^2 + x^3 + C$$

Örnek...11 :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dt = ? \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot t + C$$

Örnek...12 :

Teorem $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ olduğuna göre

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx \text{ integralini hesaplayınız} \quad \ln(x^2+5) + C$$

TÜREV İNTEGRAL VE DİFERANSİYEL İLİŞKİSİ

$$1 \quad \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

$$2 \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$3 \quad \left(\int d(f(x) dx) \right) = f(x) + C$$

Örnek...13 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int x^2 dx \right) = ? \quad x^2$$

Örnek...14 :

$$d \left(\int x^2 dx \right) = ? \quad x^2 dx$$

Örnek...15 :

$$\int d(x^2) = ? \quad x^2 + C$$

Örnek...16 :

$$\int d(x^2) + \int d\left(\frac{1}{x} - x^2\right) \quad x^2 + \frac{1}{x} - x^2 + C = \frac{1}{x} + C$$

Örnek...17 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot x^2 dx = \frac{x^6}{6} - 3x + 1 \right) \text{ ise } f(2) = ?$$

$$f(x) \cdot x^2 = x^5 - 3$$

$$f(2) \cdot 4 = 29$$

$$f(2) = \frac{29}{4}$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...18 :

$$f(x) = \int d(x^2 - 2) \text{ ise } f'(9) = ?$$

$$f(x) = x^2 - 2 + C$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(9) = 18$$

Örnek...19 :

$f(x) = \int (x^2 - 3x + 1) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonun $x=4$ de teğetinin eğimi nedir?

$$f'(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$f'(4) = 16 - 12 + 1$$

$$= 5$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int \left(\frac{x}{x+2} \cdot f(x) \right) dx = 2x^2 - 3x + 2 \text{ ise } f(x) = ? \right)$$

$$\frac{x}{x+2} f(x) = 4x - 3$$

$$f(x) = \frac{(4x-3) \cdot (x+2)}{x}$$

Örnek...21 :

Teorem. İki kez türevlenebilir $y=f(x)$ fonksiyonunda $f''(x)=0$ denkleminin tek katlı köklerine dönüm noktası denir.

$f(x) = \int (4x^2 - 2x + 3) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisini bulunuz

$$f'(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

$$f''(x) = 8x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

DEĞERLENDİRME

$$1) \int \left(\sum_{k=1}^2 (k+1)x^k \right) dx$$

$$\int (2x + 3x^2) dx$$

$$x^2 + x^3 + C$$

$$2) \int \frac{x+1}{2x+2} dx = ?$$

$$\int \frac{dx}{2} = \frac{x}{2} + C$$

$$3) \int \left(\frac{8x^3 - 5x^2 + 7}{x^2} \right) dx = ?$$

$$\int \left(8x - 5 + \frac{7}{x^2} \right) dx$$

$$4x^2 - 5x - \frac{7}{x} + C$$

$$4) \int 6x^2 \left(x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \right) dx = ?$$

$$\int (6x^4 - 2x^3 + 12x^2) dx$$

$$\frac{6x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{12x^3}{3} + C$$

$$\frac{6x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 4x^3 + C$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

- 5) f fonksiyonu (2,3) noktasındaki teğeti x eksenine pozitif yönde 45 derecelik açı yapıyor ve $f'(x)=2x-3$ ise $f(0)$ kaçır?

$$f(2)=3 \quad f'(2)=1 \quad \int f''=f'$$

$$f'(x)=\int (2x-3)dx = x^2-3x+c \quad f'(2)=4-6+c=1 \quad c=3$$

$$f(x)=\int (x^2-3x+3)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+3x+d$$

$$f(2)=\frac{8}{3}-6+6+d=3 \rightarrow d=\frac{1}{3}$$

$$f(0)=d=\frac{1}{3}$$

- 6) f(x) fonksiyonunun grafiğine x=1 noktasında çizilen teğetin eğimi 4, $f''(x)=6x+2$ ve $f(1)=2$ olduğuna göre, $f(2)$ kaç eşittir?

$$f'(x)=\int (6x+2)dx = 3x^2+2x+c \quad f'(1)=4$$

$$f'(1)=3+2+c=4 \rightarrow c=-1$$

$$f(x)=\int (3x^2+2x-1)dx = x^3+x^2-x+d$$

$$f(1)=1+1-1+d=2 \rightarrow d=1$$

$$f(2)=8+4-2+1=11$$

- 7) $y=f(x)$ fonksiyonunun her x gerçel sayısı için birinci türevi $(8x^2-6x)$ dir. $A(1,2) \in f$ ise

$$\int \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)dx = ? = ?$$

$$f(x)=\int (8x^2-6x)dx = \frac{8x^3}{3}-3x^2+c$$

$$f(1)=\frac{8}{3}-3+c=2 \rightarrow c=\frac{7}{3}$$

$$\int \left(\frac{\frac{8x^3}{3}-3x^2+\frac{7}{3}}{x^2}\right)dx = \int \left(\frac{8}{3}x-3+\frac{7}{3x^2}\right)dx$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{7}{3x} + c$$

$$= \frac{4x^2}{3} - 3x - \frac{7}{3x} + c$$

- 8) $\int (f''(x))dx = mx^2+nx$ veriliyor. f fonksiyonunun dönüm noktası $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ dir. Bu fonksiyonun x=1 deki teğeti x eksenine pozitif yönde 45° yapmaktadır. Fonksiyon x=-2 de minimum değerine sahip olduğuna göre (m+n) kaçır?

$$f''(x)=2mx+n \quad 2' \quad -m+n=0$$

$$f'(x)=mx^2+nx+c$$

$$f'(1)=1 \rightarrow m+n+c=1 \quad / -1$$

$$f'(2)=0 \rightarrow 4m+2n+c=0$$

$$\frac{3m+n=-1}{4n=-1} \Rightarrow n=-\frac{1}{4}$$

$$m=-\frac{1}{4}$$

$$m+n=-\frac{1}{2}$$

- 9) P(x) bir polinom fonksiyon ve $P(x) \int P(x)dx = 2x^3+9x^2+11x+3$ ise bu polinomun katsayılar toplamı kaç olabilir?

$$P(x) \int P(x)dx = 2x^3+9x^2+11x+3$$

$$P(x)=mx+n$$

$$(mx+n) \int (mx+n)dx = (mx+n) \left(\frac{mx^2}{2} + nx + c \right)$$

$$\frac{m^2}{2}x^3 + x^2 \left(mn + \frac{mn}{2} \right) + x(mn + n^2) + nc = 2x^3 + 9x^2 + 11x + 3$$

$$\frac{m^2}{2} = 2 \quad \frac{3mn}{2} = 9 \quad mn + n^2 = 11 \quad nc = 3$$

$$m=2 \quad n=3 \quad c=1 \quad (m=-2, n=-3, c=-1)$$

$$P(1)=5 \vee -5$$

$$10) \int \left(\frac{d(x^3)}{x^2} \right) dx = ?$$

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$\int \frac{3x^2 dx}{x^2} = \int 3 dx = 3x + c$$

- 11) $\int (d(x^3+4x+\sqrt{21})) = ?$

$$x^3+4x+c$$

- 12) $\int (x^2-1) \cdot f(x) dx = \frac{x^5}{5} - x$ ise f fonksiyonuna $x=\frac{1}{2}$ noktasından çizilen teğet x eksenine pozitif yönde kaç derecelik açı yapar?

$$(x^2-1) f(x) = x^4 - 1$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 45^\circ$$