

MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMLERİ :

Minimum ve Maksimum Problemlerini Çözmek İçin Genel Strateji

Adım 1. Problemin ne istediği, problemde ne verildiği belirlenir.

Adım 2. Probleme uygun model belirlenir : gerekirse şekiller çizilir. Minimum veya maksimum yapılması istenen niceliği temsil edecek değişken seçilir ve ekstremum değeri istenen fonksiyon yazılır

Adım 3. Adım 2 de bulunan fonksiyonun tanım kümesi bulunur.

Adım 4. Kritik noktalar bulunur

Adım 5. Model çözülür

Adım 6. Çözüm yorumlanır

Örnek...1 :

Toplamı 20 olan iki sayının çarpımı en çok kaçtır?

$$\begin{aligned}
 x+y &= 20 \\
 x \cdot y &= x \cdot (20-x) \\
 G &= 20x - x^2 \\
 G' &= 20 - 2x \\
 G_{\max} &= 200 - 100 = 100
 \end{aligned}$$

10
+ | -
→ | →

Örnek...2 :

$x+y=20$ ise $x^2 \cdot y$ en çok kaç eder?

$$\begin{aligned}
 y &= 20-x \\
 x^2 \cdot y &= x^2(20-x) \\
 f(x) &= 20x^2 - x^3 \\
 f'(x) &= 40x - 3x^2 = x(40-3x) \\
 f'(x) &= 0 \quad 40/3 \\
 f(40/3) &= 20 \cdot \left(\frac{40}{3}\right)^2 - \left(\frac{40}{3}\right)^3 = \frac{32000}{27}
 \end{aligned}$$

→ | + | →
→ | →

Örnek...3 :

$x^2+(m-2)x+m^2-3m+1=0$ denkleminin kökleri çarpımı en küçük olduğunda kökler toplamı ne olur?

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m + 1 \\
 f'(x) &= 2m - 3 \\
 m &= \frac{3}{2} \\
 x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} = -m + 2 = \frac{-3}{2} + 2 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Örnek...4 :

$x^2-(2+m)x+4-m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir $x_1^2+x_2^2$ en az kaç olabilir?

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= (m+2) \quad x_1 \cdot x_2 = 4-m \\
 f(x) &= x_1^2 + x_2^2 = (m+2)^2 - 2(4-m) \\
 &= m^2 + 4m + 4 - 8 + 2m \\
 &= m^2 + 6m - 4 \\
 f'(x) &= 2m + 6 \\
 f(-3) &= 9 - 18 - 4 = -13
 \end{aligned}$$

- | +
→ | →

Örnek...5 :

$f(x)=x^3-16x^2+5x+3$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun hangi noktadaki teğetinin eğimi en küçüktür?

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 - 32x + 5 = m \\
 f''(x) &= 6x - 32 \\
 x &= \frac{16}{3} \\
 2 \text{ p. } &= \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

- | +
→ | →

TÜREV-8

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

Örnek...6 :

$f(x)=x^2+5x+3$ parabolü üzerinde bir noktanın koordinatları toplamı en az kaç olur?

$$(x, x^2+5x+3)$$

$$x^2+5x+3+x$$

$$f(x) = x^2+6x+3$$

$$f' = 2x+6$$

$$\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$$

$$f(-3) = 9-18+3 = -6$$

Örnek...7 :

$y=\frac{12}{x}$ eğrisi üzerinde orijine en yakın noktayı bulunuz.

$$f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{12}{x}-0\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - \frac{288}{x^3}}{\sqrt{x^2 + \frac{144}{x^2}}} = 0$$

$$x = \pm \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$A(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

$$B(-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

Örnek...8 :

Şekilde bir köşesi orjin bir köşesi $y=4-x^2$ ve iki kenarı eksenler üzerinde olan OABC dikdörtgenlerden alanı en büyük olanı kaç br^2 dir?

$$A(x, 4-x^2)$$

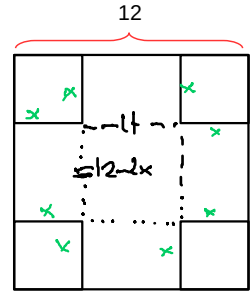
$$A(x) = x \cdot (4-x^2)$$

$$A'(x) = 4 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

Örnek...9 :

Bir kenar uzunluğu 12 birim olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden eş karesel bölgeler çıkarılarak atılıp üstü açık bir kutu yapılıyor. Kutunun hacmi en çok kaç br^3 olur?



$$V(x) = (12-2x)^2 \cdot x$$

$$V'(x) = 2(12-2x)(-2)x + (12-2x)^2$$

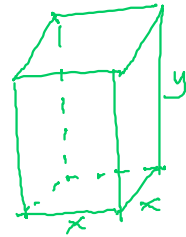
$$(12-2x)(-4x + 12-2x)$$

$$(12-2x)(-6x+12)$$

$$V(2) = (12-4)^2 \cdot 2 = 64 \cdot 2 = 128$$

Örnek...10 :

Tüm ayrıtlarının toplamı 60 olan kare dik prizmanın hacmi en çok kaç cm^3 küptür?



$$4(2x+y) = 60$$

$$2x+y = 15$$

$$V = x^2 \cdot y$$

$$= x^2(15-2x)$$

$$V(x) = 15x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 30x - 6x^2 = 6x(5-x)$$

$$V(5) = 25 \cdot 5 = 125$$

Örnek...11 :

Yarıçapı 6 birim olan bir küreyi içine alabilecek minimum hacimli bir koninin yüksekliği en çok kaç birim olur?



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\frac{6}{r} = \frac{\sqrt{h^2 - 12h}}{h}$$

$$r = \frac{6h}{\sqrt{h^2 - 12h}}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{36h^3}{h^2 - 12h} = \frac{\pi}{3} \frac{36h^2}{h-12}$$

$$V'(x) = 12\pi \left(\frac{2h(h-12) - h^2}{(h-12)^2} \right) = 0$$

$$h^2 - 24h = 0$$

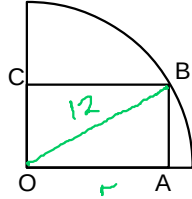
$$h_1 = 0, h_2 = 24$$

TÜREV-8

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

Örnek...12 :

şekilde O merkezli çeyrek dairenin çapı 24 birimse şekildeki gibi oluşturulabilecek dikdörtgenlerden alanı en çok olanın çevresi kaç birimdir?



$$|AB| = \sqrt{144 - r^2}$$

$$A = r \cdot \sqrt{144 - r^2}$$

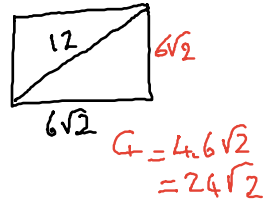
$$A = \sqrt{144r^2 - r^4}$$

$$A'(r) = \frac{1}{2} \frac{288r - 4r^3}{\sqrt{144r^2 - r^4}}$$

$$288r - 4r^3 = 0$$

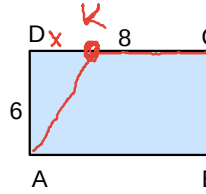
$$4r(72 - r^2) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad r_2 = 6\sqrt{2} \quad r_3 = -6\sqrt{2}$$



Örnek...13 :

Şekildeki dikdörtgen biçimli nehirdeki hızı saatte 2 km/s ve karadaki hızı 3 km/s olan bir hareketlinin en kısa sürede A noktasından C noktasına varması için takip etmesi gereken yol ne olmalıdır?



$$|KA| = \sqrt{x^2 + 36} \quad |KC| = 8 - x$$

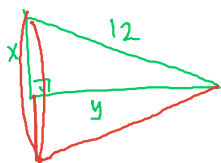
$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{2} + \frac{8 - x}{3}$$

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

D' nin $\frac{12}{\sqrt{5}}$ birim sağında karaya çıkıp devam etmeli

Örnek...14 :

Hipotenüsü 12 br olan bir dik üçgen dik kenarları biri etrafında döndürüldüğünde elde edilecek katı cismin hacmi en çok olduğunda alanı ne olur?



$$V = \pi x^2 y / 3$$

$$x^2 + y^2 = 144$$

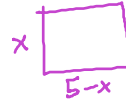
$$V = \pi \frac{(144 - y^2) y}{3}$$

$$V'(y) = \frac{\pi}{3} (144 - 3y^2) = 0 \quad y = 4\sqrt{3}$$

$$A = \pi x^2 + \pi x \cdot 12 = 96\pi + 48\sqrt{6}\pi \quad x = 4\sqrt{6}$$

DEĞERLENDİRME

- 1) Çevresi 10 cm olan dikdörtgen alanının alabileceği maksimum değerini bulunuz.

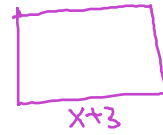


$$A = x(5 - x)$$

$$A'(x) = 5 - x - x = 0 \quad x = 5/2$$

$$A(5/2) = (5/2)^2 = \frac{25}{4}$$

- 2) Kenarları $x+3$ ile $8-2x$ olan dikdörtgenin alanı maksimum kaç birim karedir?



$$A = (8 - 2x)(x + 3) = 8x + 24 - 2x^2 - 6x = -2x^2 + 2x + 24$$

$$A'(x) = -4x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$A = \frac{49}{2}$$

- 3) $x^2 + (16m - m^3)x + 1 = 0$ denkleminin kökler toplamının maksimum olması için m e olmalıdır

$$x_1 + x_2 = m^3 - 16m$$

$$f'(m) = 3m^2 - 16$$

$$\frac{-4/\sqrt{3}}{4/\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

TÜREV-8

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

- 4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7x$ fonksiyonun grafiği üzerinde ordinat ve absis toplamı en büyük olan noktayı bulunuz.

$$T = \left(x, \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7x \right)_{maks}$$

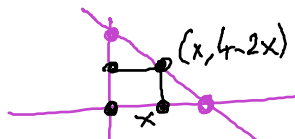
$$T = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7x + x$$

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

$$\begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline & & \end{array}$$

$$x = -3 \quad T = -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{27}{2}$$

- 5) Bir köşesi orjin diğer iki köşesi eksenler ve son köşesi de $y=4-2x$ üzerinde olan dikdörtgenlerden alanı maksimum olanının çevresi nedir?



$$A = x \cdot (4-2x) = 4x - 2x^2$$

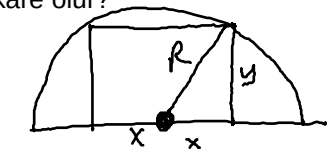
$$A' = 4 - 4x$$

$$4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 4 - 2(1) = 2$$

$$C = (1+2) \cdot 2 = 6$$

- 6) İki köşesi bir yarım çember üzerinde, diğer iki köşesi bu yarım çemberin çapı üzerinde bulunan bir dikdörtgenin alanının en büyük değeri yarıçap cinsinden en çok kaç birim kare olur?



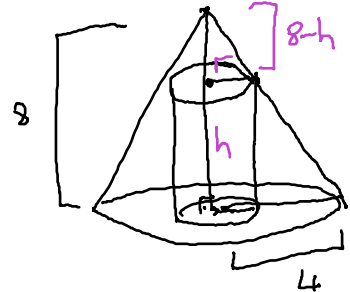
$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$A = 2x \cdot y = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$A'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad A = R^2$$

- 7) Taban yarıçapı 4cm ve yüksekliği 8 cm olan bir koni içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli silindirin yüksekliği kaç birimdir?



$$\frac{r}{4} = \frac{8-h}{8}$$

$$2r = 8-h$$

$$h = 8-2r$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot (8-2r)$$

$$V = \pi (8r^2 - 2r^3)$$

$$V'(r) = 16r - 6r^2$$

$$= 2r(8-3r)$$

$$r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{8}{3}$$

$$h = 8 - 2r = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$