

TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)$

fonksiyonuna
düzlemde

karşılık gelen
eğri yanda ki
gibi olsun.

Eğrinin

$P(x_0, f(x_0))$

noktasındaki

teğetlerini

araştıralım. Bunun için $P(x_0, f(x_0))$

noktasının sağda veya solundaki

$A(x_0+h, f(x_0+h))$ noktasını alıp A ve P den

geçen keseni çizelim. Dikkat edilirse

kesenin eğiminin $m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ olduğu

görüldür. Şimdi P noktasından geçen

teğeti bulmak için A noktasını eğri

üzerinde kaydırarak P noktasına

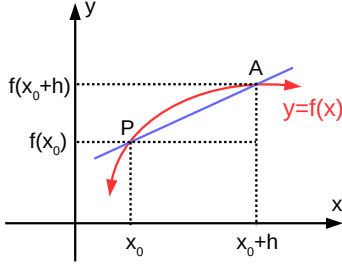
yaklaştıralım. Bu işlemi yapmakla h

değerini 0 a yaklaştırmak aynı şey

olacaktır. Bu halde teğetin eğimi $h \rightarrow 0$

için $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ in alacağı limit değeri

olacaktır.



EĞİM, TEĞET DOĞRU VE NORMAL DOĞRU

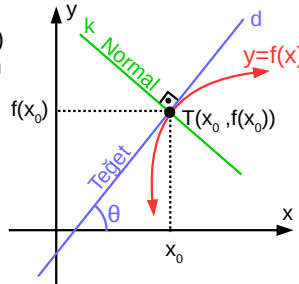
$y=f(x)$ fonksiyonun
üzerindeki $(x_0, f(x_0))$
noktasından çizilen
teğet doğrunun
eğimi m_d ise

$$m_d = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

olur.

Ayrıca $m_d = \tan \theta$ dir.

T noktasında d teğet doğrusuna dik olan
k doğrusuna ise $y=f(x)$ in T noktasındaki
normali denir.



HATIRLATMA

Eğimi m ve (x_0, y_0) noktasından geçen
doğrunun denklemi $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ olur.

Dik doğruların eğimleri çarpımı -1 dir.

Yani, $m_d \cdot m_k = -1$ dir.

TEĞET DOĞRU DENKLEMİ

$$y - y_0 = m_d \cdot (x - x_0)$$

NORMAL DOĞRU DENKLEMİ

$$y - y_0 = \frac{-1}{m_d} \cdot (x - x_0)$$

Örnek...1 :

$y=f(x)=x^2-4x+3$ fonksiyonun $x=3$
noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz?

$$m_d = f'(3)$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$m_d = f'(3) = 6 - 4 = 2$$

Örnek...2 :

$y=f(x)=x^3-x$ fonksiyonun $x=2$ noktasındaki
normalinin eğimini bulunuz?

$$m_d = f'(2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f'(2) = 11$$

$$m_d \cdot m_n = -1$$

$$m_n = \frac{-1}{11}$$

Örnek...3 :

$y=f(x)=x^2-7x$ fonksiyonun üzerindeki $P(1, f(1))$
noktasından geçen teğetinin denklemini
bulunuz?

$$f(1) = 1 - 7 = -6$$

$$f'(x) = 2x - 7$$

$$m_d = f'(1) = -5$$

$$y - y_0 = m_d (x - x_0)$$

$$y - (-6) = -5 (x - 1)$$

$$y + 6 = -5x + 5$$

$$y = -5x - 1$$

Örnek...4 :

$y=f(x)=4x^2$ fonksiyonun $x=2$ noktasındaki
teğetinin denklemini bulunuz?

$$f(2) = 16$$

$$f'(2) = m_d = 16$$

$$f'(x) = 8x$$

$$y - y_0 = m_d (x - x_0)$$

$$y - 16 = 16 (x - 2)$$

$$y = 16x - 16$$

TÜREV -7

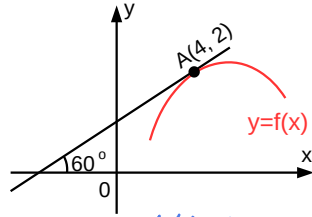
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

Örnek...5 :

$y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.

$$g(x)=f^2(x)-\frac{5}{f(x)} \text{ ise } g$$

fonskiyonunun $x=4$ deki teğetinin eğimi kaçtır?



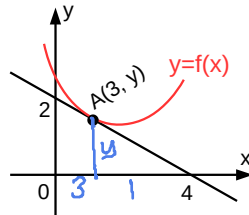
$$f(4)=2 \quad f'(4)=\tan 60=\sqrt{3}$$

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 5[f(x)]^{-2} \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned} g'(4) &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{21\sqrt{3}}{4} \text{ K} \end{aligned}$$

Örnek...6 :

$y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir. $h(x)=f^2(3x)$ ise h fonskiyonunun $x=1$ deki teğetinin eğimi kaçtır?



$$\frac{y}{2} = \frac{1}{4} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = 2f(3x) \cdot f'(3x) \cdot 3$$

$$\begin{aligned} h'(1) &= 2f(3) \cdot f'(3) \cdot 3 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \\ &= -3/2 \text{ K} \end{aligned}$$

Örnek...7 :

$g(x)=\frac{x^3}{3}-3x+a$ ile $f(x)=2+x$ fonksiyonu teğetse a sayısının negatif değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} m_+ &= 1 = g'(x_0) \\ g'(x) &= x^2-3 \\ x_0^2-3 &= 1 \\ x_0 &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2, 4) &\in g(x) \\ \frac{8}{3}-6+a &= 4 \\ a &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-2, 0) &\in g(x) \\ -\frac{8}{3}+6+a &= 0 \\ a &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

Örnek...8 :

$f(x)=3x^2-6x+5$ ve $g(x)=mx^2+(n-2)x-3$ fonksiyonlarının her x için teğetleri paralelse m ve n yi bulunuz.

$$f'(x) = g'(x) \quad (\forall x)$$

$$6x-6 = 2mx + n-2$$

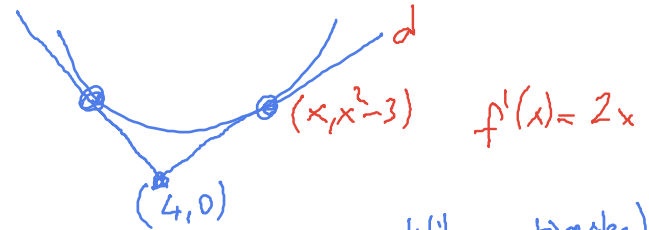
$$m=3$$

$$n=-4$$

$$(m,n) = (3,-4)$$

Örnek...9 :

$f(x)=x^2-3$ fonksiyonuna A(4,0) noktasından çizilen teğetlerin değme noktalarının apsistler toplamını bulunuz?



$$m_d = \frac{x^2-3-0}{x-4} = 2x \quad (\text{analitik eğim} = \text{türevden eğim})$$

$$\begin{aligned} 2x^2-8x &= x^2-3 \\ x^2-8x+3 &= 0 \rightarrow x_1+x_2 = -\frac{-8}{1} = 8 \end{aligned}$$

Örnek...10 :

$f(x)=x^2+2$ fonksiyonuna üzerindeki A(1,y) noktasından çizilen normal eğriyi başka hangi noktada keser?

$$m_+ = f'(1) = 2$$

$$m_n = -\frac{1}{m_+} = -\frac{1}{2}$$

$$y-3 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow 2y+x=7 \quad (d_n)$$

$$x^2+2 = \frac{7-x}{2}$$

$$\begin{aligned} 2x^2+x-3 &= 0 \rightarrow x_1=1 \\ x_2 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$N\left(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right) \quad (2. \text{ nokta}) \quad 2/5$$

$$\begin{aligned} -\frac{8}{3}+6+a &= 0 \\ a &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

Örnek...11 :

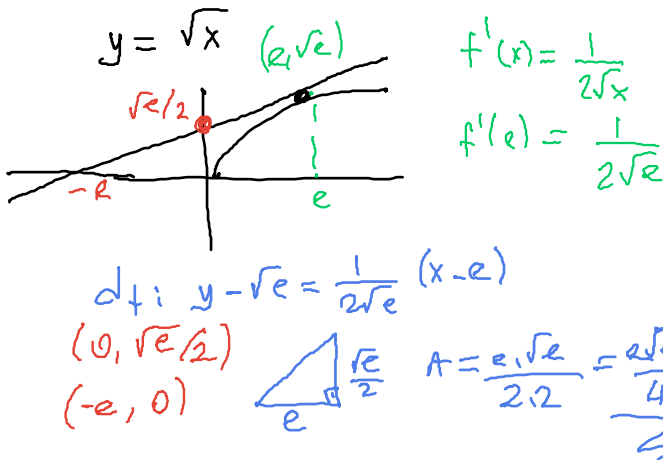
Tanım: Kesim noktasında teğetleri dik olan eğrilere dik kesişen eğriler denir.

$f(x)=\frac{k}{x}$ ile $g(x)=\frac{x^2}{9}$ eğrileri dik kesişiyor ise k kaçtır?

$$\begin{aligned} \frac{k}{x} &= \frac{x^2}{9} & x^3 &= 9k & x &= \sqrt[3]{9k} \\ f'(x) &= -\frac{k}{x^2} & g'(x) &= \frac{2x}{9} \\ f'(x) \cdot g'(x) &= -1 & -\frac{k}{x^2} \cdot \frac{2x}{9} &= -1 \rightarrow x = \frac{2k}{9} \\ \sqrt[3]{9k} &= \frac{2k}{9} & 9k &= \frac{8k^3}{9^3} \\ 9^4 k &= 8k^3 & \frac{9^4}{8} &= k^2 \\ k &= \frac{9^2}{\sqrt{8}} = \frac{81}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

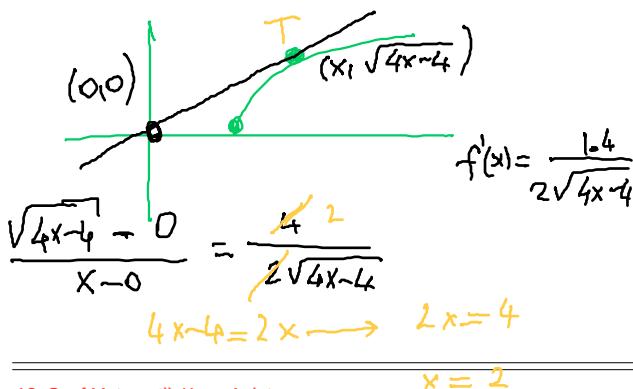
Örnek...12 :

$f(x)=e^{\ln x}$ eğrisine üzerinde apsisi e olan noktadan çizilen teğetin x eksenine sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?



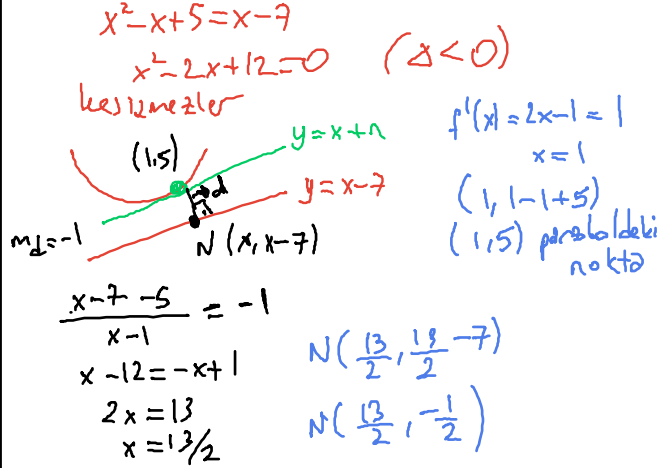
Örnek...13 :

$f(x)=\sqrt{4x-4}$ eğrisinin orijinden geçen teğetlerinin değme noktasının apsisi nedir?



Örnek...14 :

$y=x-7$ doğrusu üzerinde bulunup $y=x^2-x+5$ parabolüne en yakın noktanın koordinatları nedir?



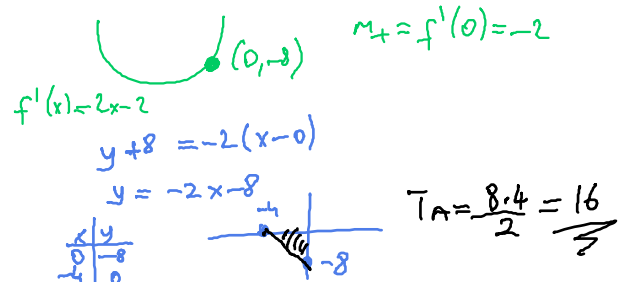
Örnek...15 :

$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$ fonksiyonun x eksenine paralel teğetlerinin eğriye değdiği noktalar arası mesafe kaç birimdir?

$$\begin{aligned} m_t &= 0 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 = (x+3)(x-1) \\ N_1(-3, -9+9+9+1) & N_2(1, \frac{1}{3}+1-3+1) \\ N_1(-3, 10) & N_2(1, -\frac{2}{3}) \\ |N_1 N_2| &= \sqrt{4^2 + (\frac{32}{3})^2} = \frac{4\sqrt{73}}{3} \end{aligned}$$

Örnek...16 :

$f(x)=x^2-2x-8$ fonksiyonuna üzerindeki $A(0,k)$ noktasından çizilen teğetin eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanı kaç birim karedir?

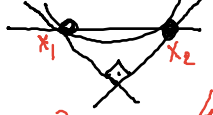


TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x)=x^2+ax+5$ eğrisinin x eksenini x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetlerin dik olması için a ne olmalıdır?



$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 \cdot x_2 = 5$$

$$f'(x) = 2x + a$$

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$$

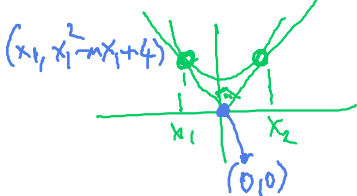
$$(2x_1 + a)(2x_2 + a) = -1$$

$$4x_1x_2 + 2a(x_1 + x_2) + a^2 = -1$$

$$20 - 2a^2 + a^2 = -1$$

$$a^2 = 21 \quad a = \pm\sqrt{21}$$

- 2) $y=f(x)=x^2-mx+4$ fonksiyonuna orijinden çizilen teğetler dikse m değeri kaçtır? $m>0$



$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$$

$$f'(x) = 2x - m$$

$$\frac{x_1^2 - mx_1 + 4 - 0}{x_1 - 0} = 2x_1 - m$$

$$x_1^2 - mx_1 + 4 = 2x_1^2 - mx_1$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$f'(2) \cdot f'(-2) = -1$$

$$(4-m)(-4-m) = -1$$

$$-16 + m^2 = -1$$

$$m = \pm\sqrt{15}$$

$$(m > 0 \Rightarrow m = \sqrt{15})$$

- 3) $y=f(x)=x^2+2x+7$ fonksiyonunun hangi noktasındaki teğeti orijinden geçer?



$$\frac{x^2 + 2x + 7 - 0}{x - 0} = 2x + 2$$

$$x^2 + 2x + 7 = 2x^2 + 2x$$

$$x^2 = 7 \quad x = \pm\sqrt{7}$$

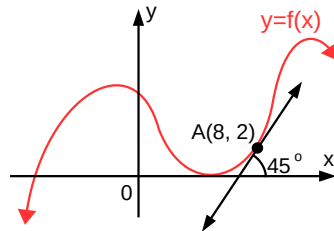
$$(\sqrt{7}, 14 + 2\sqrt{7})$$

$$(-\sqrt{7}, 14 - 2\sqrt{7})$$

- 4) $y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.

$$g(x^2) = f^2(x^3)$$

$$\text{ise } g'(4) = ?$$



$$g'(x^3) \cdot 2x = 2 \cdot f(x^3) \cdot f'(x^3) \cdot 3x^2$$

$$f(8) = 2 \quad f'(8) = 1$$

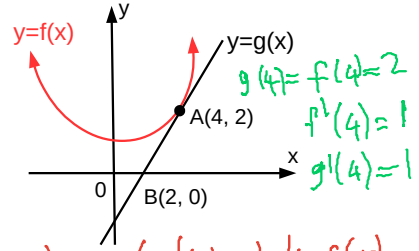
$$g'(4) \cdot 4 = 2 \cdot f(8) \cdot f'(8) \cdot 12$$

$$g'(4) = 12$$

- 5) $y=f(x)$ parabolü ve bu parabolün A noktasındaki teğeti olan $y=g(x)$ doğrusu veriliyor.

$$h(x) = \frac{k \cdot f(x)}{g(x) + x} \quad \text{için}$$

$$h'(4) = 1 \quad \text{ise } k \text{ kaçtır?}$$



$$h'(x) = \frac{k \cdot f'(x) \cdot (g(x) + x) - (g'(x) + 1) \cdot k \cdot f(x)}{(g(x) + x)^2}$$

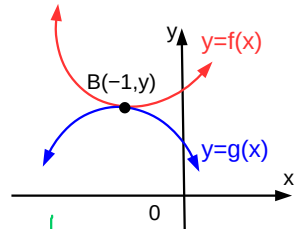
x=4 için
değerler
yukarı
yazılıyor

$$k = 18$$

- 6) B noktasında teğet olan $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ parabolleri veriliyor.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{için}$$

$$h'(-1) = ?$$



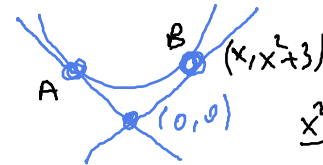
$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

$$f(x) = g(x) \quad \text{olduğundan} \quad h'(-1) = \frac{0}{g^2(-1)} = 0$$

$$f'(x) = g'(x) \quad (x = -1)$$

- 7) $f(x)=x^2+3$ fonksiyonuna orijinden çizilen teğetlerin değme noktaları arası mesafe kaç birimdir?

$$f'(x) = 2x$$



$$\frac{x^2 + 3 - 0}{x - 0} = 2x$$

$$x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

$$A(-\sqrt{3}, 6) \quad B(\sqrt{3}, 6)$$

$$|AB| = 2\sqrt{3}$$

- 8) $f(x)=x^2-x$ ve $g(x)=3x-x^2$ eğrilerinin kesim noktalarından f fonksiyonuna çizilen teğetlerin arasındaki açının tanjantı kaç olabilir?

$$x^2 - x = 3x - x^2 \quad 2x^2 - 4x = 2x(x-2) = 0$$

$$m_1 = f'(0) =$$

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = 3$$

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-1 - 3}{1 + (-3)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

- 9) $y=ax^2+bx+c$ parabolüne orijinden çizilen teğetler dikse a,b,c arası hangi bağıntı vardır?

$f'(x) = 2ax + b$

$(0,0)$

$(x_1, ax_1^2 + bx_1 + c)$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}$

$x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$

$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$

$(2a\sqrt{\frac{c}{a}} + b)(2a(-\sqrt{\frac{c}{a}}) + b) = -1$

$b^2 - 4ac = -1$

$\Delta = -1$

- 10) $h(x) = x + \frac{4}{2x+3}$ fonksiyonunun x eksenine paralel teğetlerinin değme noktaları apsisi çarpımını kaçtır?

$h'(x) = 1 - 4(2x+3)^{-2} \cdot 2 = 0$

$4x^2 + 12x + 1 = 0$

$x_1, x_2 = -1/4$

- 11) $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonun $x=1$ apsisli noktasından çizilen teğetinin eksenlerle oluşturduğu bölgenin alanı kaç birim karedir?

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(1) = m_t \Rightarrow -\frac{1}{1^2} = m_t = -1$

$y - 1 = -1(x - 1) \rightarrow y = -x + 2$

$T_A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

- 12) $y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir. $h(x) = x^2 \cdot f(x)$ ise h fonksiyonunun $x=1$ deki teğetinin eğimi kaçtır?

$h'(x) = 2x \cdot f(x) + f'(x) \cdot x^2$

$h'(1) = 2 \cdot f(1) + f'(1) \cdot 1$

$h'(1) = 2 \cdot 4 + \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$

- 13) $g(x) = x^2 + 9$ fonksiyonuna hangi noktalardan çizilen teğetler orijinden geçer?

$f'(x) = 2x$

$\frac{x^2 + 9 - 0}{x - 0} = 2x$

$x^2 = 9$

$x_1 = 3 \rightarrow (3, 18)$

$x_2 = -3 \rightarrow (-3, 18)$

- 14) $y = x^2 + 4$ eğrisine $y = x$ doğrusunun en yakın noktasının apsisi kaçtır?

$f'(x) = 1$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$A(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4})$

$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$m_{AB} = -1$

$\frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = -1$

$x = \frac{19}{8}$

- 15) $y = x^2$ eğrisinin $x=1$ noktasındaki teğeti ve normali ile y ekseninde kalan kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$f'(x) = 2x$

$m_t = f'(1) = 2$

$m_n = -\frac{1}{2}$

$N(1, 1)$

$d_t: y - 1 = 2(x - 1) \rightarrow y - 2x = -1$

$d_n: y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow 2y + x = 3$

$5x = 5$

$x = 1$

$T_A = \frac{1 \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$