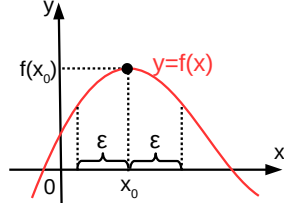


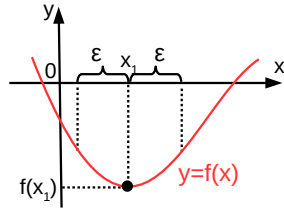
YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM:

$f: A \rightarrow B$, $y=f(x)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere f fonksiyonu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \in$ aralığında en büyük değerini x_0 noktasında alıyorsa fonksiyonun bu noktada yerel maksimumu vardır denir. Şekli inceleyiniz.

Yandaki şekilde x_0 içine alan bir aralıkta $f(x_0)$ değerinden daha büyük bir görüntüye sahip değer bulunmadığından $f(x_0)$ değeri yerel maksimum ve x_0 noktası yerel maksimum noktasının apsisi.



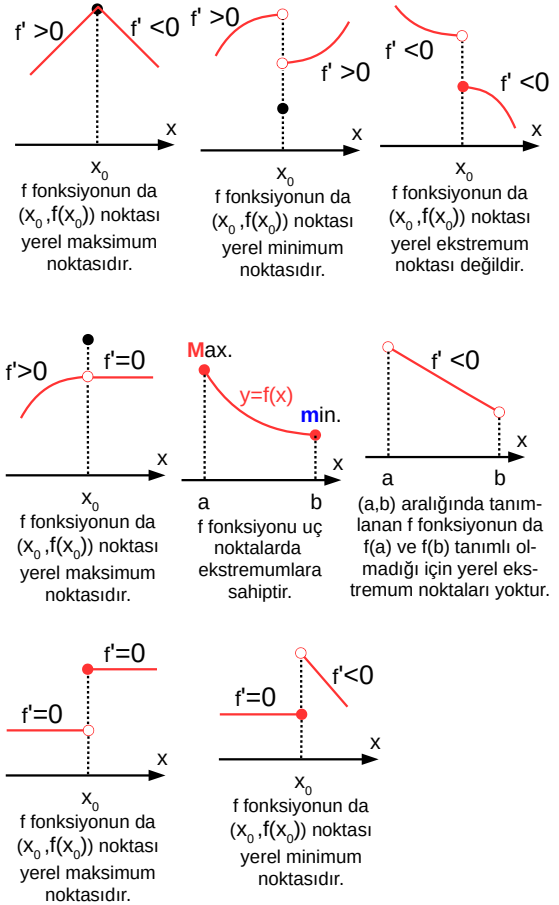
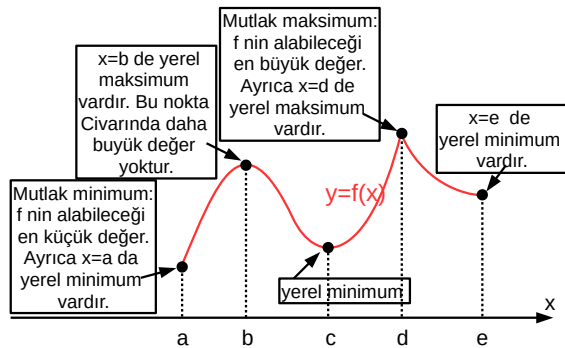
Benzer bir düşünceyle $x_1 \in (a,b)$ olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonu $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \in$ aralığında en küçük değerini x_1 noktasında alıyorsa fonksiyonun bu noktada yerel minimumu vardır denir. Şekli inceleyiniz.



Yerel maksimum veya yerel minimuma kısaca yerel ekstremum denir.

Özetlersek $x=x_0$ apsisini içide bulunduran en az bir açık aralıkta diğer tüm x değerleri için $f(x_0) \leq f(x)$ oluyorsa $x=x_0$ yerel minimum noktasının apsisi; $f(x_0) \geq f(x)$ oluyorsa $x=x_0$ yerel maksimum noktasının apsisi olur.

Şekli inceleyiniz.



TEOREM 1 : SÜREKLİ FONKSİYONLAR İÇİN EKSTREMUM DEĞER TEOREMİ

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonu A da maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.

TEOREM 2

Eğer f fonksiyonu c gibi bir noktada ekstremum değerine sahip ve yine bu noktada türevlenebiliyorsa $f'(c)=0$ olur.

TÜREV – 5

EKSTREMUM NOKTALARI

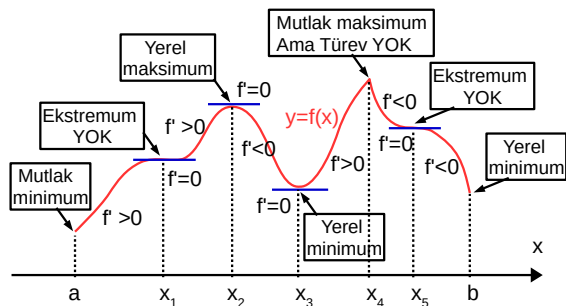
UYARI:

Bir fonksiyonun bir noktada türevinin 0 olması fonksiyonun o noktada ekstremuma sahip olmasını gerektirmez.

KRİTİK NOKTA

x_0 , f fonksiyonunun tanım kümesinin bir elemanı ve $f'(x_0)=0$ oluyorsa veya $f'(x_0)$ yoksa $x=x_0$ kritik nokta adını alır. Sınırlı bir aralıkta tanımlı noktalar için sınır değerleri de ekstremum için mutlaka araştırılmalıdır.

Genel olarak $y=f(x)$ fonksiyonu
ekstremum değerlerini uç noktalarda
veya kritik noktalarda alır.



Örnek...1 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-3x+2$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$$

x	-1	1
y	+	-
	↗	↘

$(-1, 4) \rightarrow$ yerel maks
 $(1, 0) \rightarrow$ yerel min

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

Örnek...2 :

$f(x)=y=3x^4-16x^3+24x^2$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 48x + 48x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 4) \\ &= 12x(x-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 2 \\ y \mid \hline - \quad + \quad + \\ \hline \end{array} \quad (2, 16) \text{ yeri}$$

Örnek...3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=\frac{x}{3-4x}$ fonksiyonun
ekstremum noktalarını bulunuz?

$$f'(x) = \frac{1(3-4x) + 4x}{(3-4x)^2} = \frac{3}{(3-4x)^2}$$

y' | $\frac{3}{4}$
 + 0 +
 ↗ ↘

ekstrem yoktur.

Örnek...4 :

$f(x)=y=x^5+4x^2+ax-3$ fonksiyonun $x=2$ de ekstremumu varsa a ne olmalıdır?

$$f'(2) = 0$$

$$f'(x) = 5x^4 + 8x + 2$$

$$f'(2) = 80 + 16 + 2 = 0$$
$$\theta = -96/4$$

Örnek...5 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3+mx^2+nx-2$ fonksiyonu $x=0$ da maksimum, $x=1$ de minimum değerine sahipse (m,n) ikilisini bulunuz?

$$f'(0) = 0 \quad f'(1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2mx + n = 0$$

$$f'(0) = 1 = 0$$

$$f'(1) = 3 + 2m + 1 = 0 \quad m = -3/2$$

$$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$f(2) = 48 - 16.8 + 24.4 = 16$$

TÜREV - 5

EKSTREMUM NOKTALARI

Örnek...6 :

$f: [3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=3x^2-24$ fonksiyonunun maksimum değerini bulunuz?

$$f'(x) = 6x$$

$$y' \begin{array}{c} 0 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$f(-3) = 27 - 24 = 3 \text{ (yeni maks (-3, 3))}$$

$$f(0) = -24 \text{ (yeni min (0, -24))}$$

$$f(2) = 12 - 24 = -12$$

Örnek...7 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-3x^2+6x+2$ veriliyor.
 $y=f'(x)$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz?

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$$

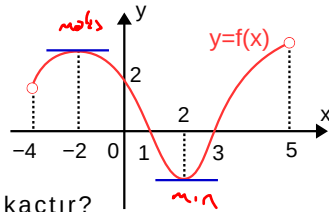
$$f''(x) = 6x - 6$$

$$y' \begin{array}{c} 1 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$f'(1) = 3 - 6 + 6 = 3 \text{ (yeni min)}$$

Örnek...8 :

Grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsilerinin çarpımı kaçtır?



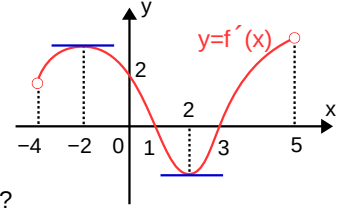
$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = -4$$

Örnek...9 :

Grafik $y=f'(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsilerini belirtiniz?



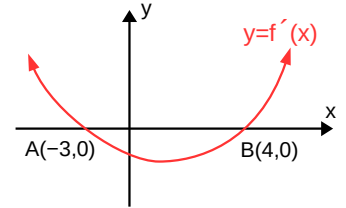
	1	3	
y'	+	-	+
y	↗	↘	↗

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

Örnek...10 :

Türevinin grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi nedir?



	-3	4	
y'	+	-	+
y	↗	↘	↗

$$x_1 = -3$$

Örnek...11 :

$y=f(x)=x^3-3x^2+m$ fonksiyonunun grafiği x eksenini 3 noktada kesiyorsa m'nin kaç farklı tamsayı değeri vardır?



$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

	0	2	
y'	+	-	+
y	↗	↘	↗

$$f(0) > 0 \rightarrow m > 0$$

$$f(2) < 0 \rightarrow 8 - 12 + m < 0$$

$$0 < m < 4$$

$$m = 1, 2, 3$$

$$3 \text{ değer}$$

TÜREV - 5

EKSTREMUM NOKTALARI

Örnek...12 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-3x^2+mx+n$ fonksiyonun tersi varsa en küçük m tamsayısı kaçtır?

f 1-1 $\Rightarrow$ daima artan olmalı

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + m$$

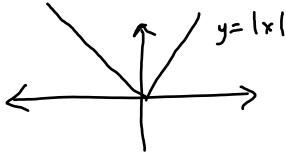
$$\Delta \leq 0 \quad 36 - 4 \cdot 3 \cdot m \leq 0$$

$$3 \leq m$$

$$m_{\min} = 3$$

Örnek...13 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=|x|$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri nedir?



$(0,0)$ yerel min değeridir
(mutlak min)

Örnek...14 :

$f: [-2,4] \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x|x^2-1|+2x$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve minimum değerleri nedir?

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & -2 < x < -1 \\ -x^3 + 3x & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 + x & 1 < x < 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 \rightarrow \text{aralıktaki artan} \\ -3x^2 + 3 \rightarrow \text{aralıktaki artan} \\ 3x^2 + 1 \rightarrow \text{aralıktaki artan} \end{cases}$$

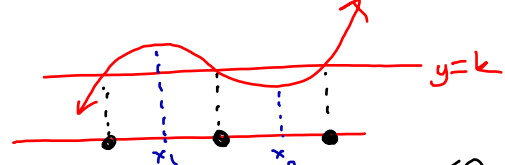
fonksiyon daima artandır.

$$f(-2) = -10 \text{ mutlak min}$$

$$f(4) = 68 \text{ mutlak maks}$$

Örnek...15 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+1$ fonksiyonu ve $y=k$ fonksiyonu hangi k değerleri için 3 farklı noktada kesişir?



$f(x)-k$ fonksiyonunda $\min < 0$ $\max > 0$ olur

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 - k$$

$$3x^2 + 3x - 6$$

$$3(x^2 + x - 2)$$

$$3(x+2)(x-1)$$

$$x = -2 \Rightarrow -8 + 6 + 12 + 1 - k > 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + \frac{3}{2} - 6 + 1 - k < 0$$

$$-\frac{5}{2} < k < 11$$



Örnek...16 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3+x^2+mx+3$ eğrisine $y=-3 \rightarrow m=0$ doğrusuna paralel olacak şekilde iki teğet çizilebiliyorsa m kaçtır?

$$f'(x) = 0 \text{ 2 kök olmalı } (\Delta > 0)$$

$$3x^2 + 2x + m = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot m > 0$$

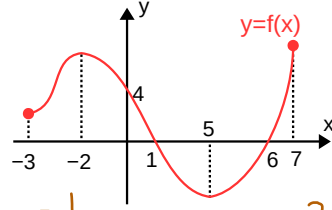
$$m < \frac{1}{3}$$

TÜREV - 5

EKSTREMUM NOKTALARI

DEĞERLENDİRME

- 1) $y=f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsilerini belirleyiniz.

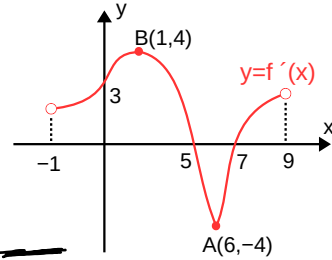


$$x_1 = -2 \text{ maks} \quad x_2 = 5 \text{ min} \quad x_3 = -3 \text{ min} \quad x_4 = 7 \text{ maks}$$

- 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^5-4x^2+mx+2$ fonksiyonu $x=1$ de ekstremuma sahipse m kaçtır?

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ f'(x) &= 5x^4 - 8x + m \\ f'(1) &= 5 - 8 + m = 0 \\ m &= 3 \end{aligned}$$

- 3) $y=f'(x)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisini belirleyiniz.



	5	7
y'	+	-
y	↗	↘

yerel min apsi 7

- 4) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+8x+1$ fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarını bulunuz?

$$f'(x) = 2x + 8$$

y'	-	+
y	↘	↗

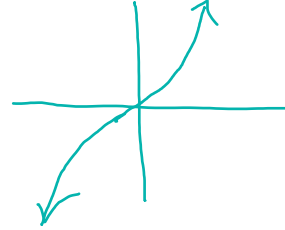
Tamam Ar.

$$f(-2) = 4 - 16 + 1 = -11 \rightarrow (-2, -11) \rightarrow \text{min}$$

$$f(3) = 9 + 24 + 1 = 34 \rightarrow (3, 34) \rightarrow \text{maks}$$

- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x|x|$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri var mıdır?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



yerel ekstremum yoktur
daima artandır.

- 6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=mx^3-3x^2+x+n$ fonksiyonun tersi yoksa m kaçtır?

$$\begin{aligned} 1-1 \text{ değil} \\ y' &= 3mx^2 - 6x + 1 \quad \Delta > 0 \\ 36 - 4 \cdot 3m \cdot 1 &> 0 \\ m &< 3 \quad m \in (-\infty, 3) \end{aligned}$$

- 7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=\frac{x^2+mx+2}{x+3}$ yerel ekstremum değerleri çarpımı 4 ise m kaçtır?

$$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - 1 \cdot (x^2+mx+2)}{(x+3)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 + 6x + 3m - 2}{(x+3)^2} \rightarrow \frac{c}{a} = 4$$

$$3m - 2 = 4$$

$$3m = 6 \\ m = 2 \checkmark$$