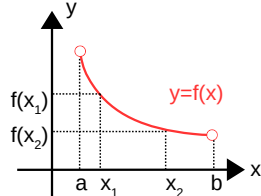


TÜREV -4

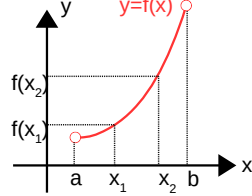
ARTAN AZALAN FONKSİYONLAR

TÜREV VE ARTANLIK AZALANLIK

$f:A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)$ olsun
her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu **artan**
her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu **azalan** fonksiyondur.



Her $x_1 < x_2$ ve $f(x_2) < f(x_1)$ olduğundan $f(x)$ azalandır



Her $x_1 < x_2$ ve $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan $f(x)$ artandır

TEOREM

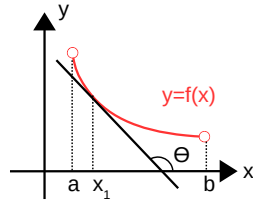
$f:A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)$ olsun. Türevli $y=f(x)$ fonksiyonunda

$\forall x \in (a, b) \subset A$, $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında artan;

$\forall x \in (a, b) \subset A$, $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında azalan bir fonksiyondur.

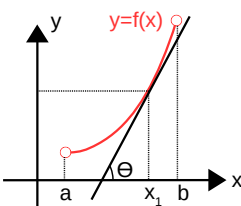
Geometrik yorum: Verilen aralıkta çizilen teğet doğruların eğim açıları ürevin işaretidir

Azalan fonksiyon



$$m = \tan \theta = f'(x_1) < 0$$

Artan fonksiyon



$$m = \tan \theta = f'(x_1) > 0$$

Özet olarak bir fonksiyonun artanlığı ve azanlığı araştırılırken fonksiyonun türevinin işaretine göre yorum yapılır.

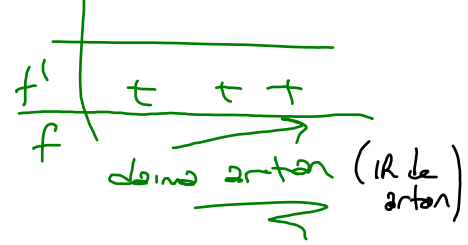
İspat $x_0 \in (a, b)$ ve $f'(x_0) > 0$ olsun. Bu durumda $f'(x_0^+) > 0$ olur. Yani

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ limitinin değeri de pozitiftir. $h > 0$ olduğundan $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ veya $f(x_0+h) > f(x_0)$ olmalıdır. $f'(x_0^+) > 0$ olduğu durumu da siz gösteriniz

Örnek...1 :

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

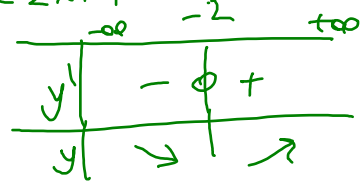
$$f'(x) = 2$$



Örnek...2 :

$f(x) = x^2 + 4x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

$$f'(x) = 2x + 4$$



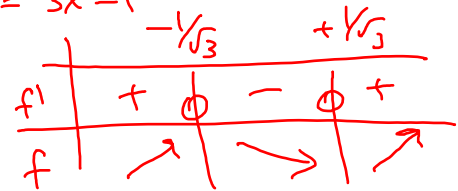
$(-\infty, -2]$ f azalandır

$[2, \infty)$ f artandır

Örnek...3 :

$f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

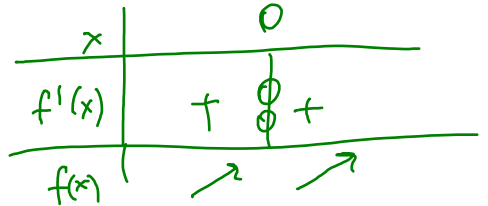


$(-\infty, -\frac{1}{3}]$ $\cup$ $[\frac{1}{3}, \infty)$ artan $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ azalan

Örnek...4 :

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

$$f'(x) = 3x^2$$



$f(x)$ $\mathbb{R}$ de artan.

TÜREV -4

ARTAN AZALAN FONKSİYONLAR

Örnek...5 :

$f(x) = \frac{x^3}{3} - mx^2 + 4x + 2$ fonksiyonunun daima artan olması için m nasıl seçilmelidir ?

$$f'(x) = x^2 - 2mx + 4$$

$$\Delta \leq 0 \quad 4m^2 - 16 \leq 0$$

$$m^2 \leq 4$$

$$-2 \leq m \leq 2$$

$$x < 0 \quad f < 0 \quad f' > 0$$

Örnek...6 :

$y=f(x)$ fonksiyonu $(-5,-1)$ aralığında negatif tanımlı artan bir fonksiyon ise aynı aralıkta aşağıda verilen fonksiyonların artanlık azalanlık durumlarını inceleyiniz

a) $y=f^2(x) \rightarrow$ azalandır.

$$y' = 2f(x) \cdot f'(x) = -$$

b) $y = \frac{1}{f(x)}$

$$y = [f(x)]^{-1}$$

$$y' = -1 \cdot [f(x)]^{-2} \cdot f'(x)$$

$$= - \cdot + \cdot + = -$$

azalandır.

c) $y = x \cdot f(x)$

$$y' = f(x) + f'(x) \cdot x = -$$

azalandır.

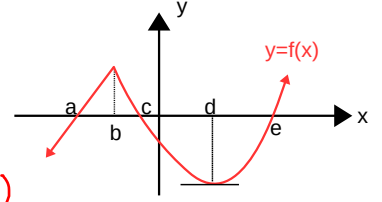
d) $y = f(x^3)$

$$y' = f'(x^3) \cdot 3x^2$$

artandır

Örnek...7 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz



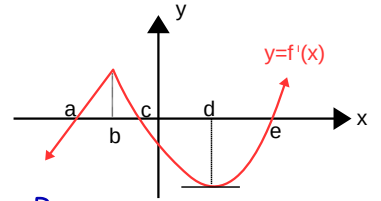
$$(-\infty, b] \cup [d, \infty)$$

Artandır

$$[b, d]$$
 azalandır

Örnek...8 :

Türevinin grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz



	a	b	c	d	e
$f'(x)$	-	0	+	0	-
y	↘	↗	↘	↗	↘

$$(-\infty, a] \cup [c, e]$$
 için azalandır

$$[a, c] \cup [e, \infty)$$
 için artandır.

TÜREV -4

ARTAN AZALAN FONKSİYONLAR

DEĞERLENDİRME

- 1) $y=f(x)=-x^2-3x+1$ fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık nedir?

$$f'(x) = -2x - 3$$

	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	∞
y'	+	-	
y	↗	↘	

$(-\infty, -\frac{3}{2}]$ için artandır.

- 2) $y = e^{x^2-x+2}$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

$$y = x^2 - x + 2$$

$$y' = 2x - 1$$

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	∞
y'	-	+	
y	↘	↗	

$(-\infty, \frac{1}{2}]$ için azalır
 $[\frac{1}{2}, \infty)$ için artandır

- 3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - mx^2 + mx + 2$ fonksiyonunun daima artan olması için m nasıl seçilmelidir?

$$f'(x) = x^2 - 2mx + m$$

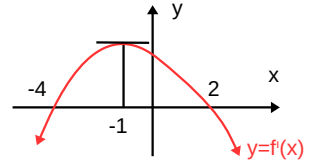
$$\Delta = 4m^2 - 4m \leq 0$$

$$4m(m-1) \leq 0$$

m	0	1
	+	-
	+	+

$m \in [0, 1]$

- 4) Türevinin grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu en geniş açık (a,b) ise a^b kaçtır



x	$-\infty$	-4	2	∞
y'	-	0	+	0
y	↘	↗	↘	

$(a,b) = (-4, 2) \rightarrow a^b = (-4)^2 = 16$

- 5) $y=f(x)$ fonksiyonu $(-2,2)$ aralığında pozitif tanımlı azalan bir fonksiyon ise aynı aralıkta aşağıda verilen fonksiyonların artanlık azalanlık durumlarını inceleyiniz

$-2 < x < 2$ $f > 0$ $f' < 0$

a) $y = f^3(x) \rightarrow y' = 3 \underbrace{f^2(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{-} = -$ azalır

b) $y = f(-x) \quad y' = \underbrace{f'(-x)}_{-} \cdot (-1) = +$ artandır

c) $\frac{1}{f(x)} \quad y = [f(x)]^{-1}$
 $y' = -1 \cdot \underbrace{[f(x)]^{-2}}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{-} = +$ artandır