

TÜREV - 3

KURALLAR-2

TÜREVDE BİLEŞKE KURALI

$f:A \rightarrow B$ ve $g:B \rightarrow C$ olmak üzere,
 $\text{gof}:A \rightarrow C$ verilsin. f fonksiyonu x
noktasında ; g fonksiyonu ise $f(x)$
noktasında türevlenebiliyorsa $(\text{gof})(x)$
fonksiyonu x noktasında türevlidir ve

$$(\text{gof})'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

olarak tanımlanmıştır

Örnek...1 : $f'(x) = 2x$ $g'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^3 + 1$ olarak veriliyor,

a) $(\text{fog})'(x) = ?$

$$\begin{aligned} (\text{fog})'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f'(x^3 + 1) \cdot 3x^2 \\ &= 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

b) $(\text{gof})'(x) = ?$

$$\begin{aligned} (\text{gof})'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= g'(x^2 - 1) \cdot 2x \\ &= 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x \end{aligned}$$

Örnek...2 : $f'(x) = 2x - 3$ $f(2) = -2$
 $g'(x) = 3x^2$ $g(2) = 10$

$f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = x^3 + 2$ olarak veriliyor,

a) $(\text{fog})'(2) = ?$

$$\begin{aligned} (\text{fog})'(2) &= f'(g(2)) \cdot g'(2) \\ &= f'(10) \cdot g'(2) \\ &= (7) \cdot 12 \\ &= 204 \end{aligned}$$

b) $(\text{gof})'(2) = ?$

$$\begin{aligned} (\text{gof})'(2) &= g'(f(2)) \cdot f'(2) \\ &= g'(-2) \cdot f'(2) \\ &= (-6) \cdot 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$f(x) = 3x^2 - x$ ise $(\text{fof})'(1) = ?$

$$\begin{aligned} (\text{fof})'(1) &= f'(f(1)) \cdot f'(1) \\ &= f'(2) \cdot f'(1) = 11 \cdot 5 = 55 \end{aligned}$$

NOT

$y = u(x)$, x e bağlı bir fonksiyon ise,
 $y = f(u) \rightarrow y' = f'(u) \cdot u'$ biçimindedir.

Örneğin $y = f(x^2 + x) \rightarrow y' = f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$ dir.

Örnek...4 :

$f(x^2 - x) = 6x^3 - 2$ ise pozitif x için $f'(2) = ?$

$$f'(x^2 - x) \cdot (2x - 1) = 18x^2$$

$$x^2 - x = 2 \rightarrow x = 2$$

$$f'(2) \cdot 3 = 72 \rightarrow f'(2) = 24$$

Örnek...5 :

$f(x^3) = 2x^2 - 5x + 6$ ise $f'(-8) = ?$

$$f'(x^3) \cdot 3x^2 = 4x - 5$$

$$x = -2 \Rightarrow f'(-8) \cdot 12 = -13 \rightarrow f'(-8) = \frac{-13}{12}$$

BİLEŞKE VE KUVVET KURALININ GENELLEMESİ

$$y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

Örnek...6 :

$y = f(x) = (x^3 + 8x^2 - 6x + 1)^3$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^3 + 8x^2 - 6x + 1)^2 \cdot (3x^2 + 16x - 6)$$

Örnek...7 :

$f(x) = (x^2 - x - 1)^8$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = 8(x^2 - x - 1)^7 \cdot (2x - 1)$$

TÜREV - 3

KURALLAR-2

Örnek...8 :

$f(x) = (x^3 + x)^3 + (4 - 2x)^2$ ise $f'(0) = ?$

$$f'(x) = 3(x^3 + x)^2 \cdot (3x^2 + 1) + 2 \cdot (4 - 2x) \cdot (-2)$$

$$f'(0) = 0 + 2 \cdot (4) \cdot (-2) = -16$$

Örnek...9 :

$g(5) = -3$, $g'(5) = -2$ ve $f(x) = g^4(x^3 - 3)$ ise $f'(2) = ?$

$$f'(x) = 4g^3(x^3 - 3) \cdot g'(x^3 - 3) \cdot 3x^2$$

$$f'(2) = 4 \cdot g^3(5) \cdot g'(5) \cdot 12$$

$$f'(2) = 48 \cdot (-3)^3 \cdot (-2) \cdot 12$$

$$= 31.104$$

Örnek...10 :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ ise $f'(3) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2)^{-1/2} \cdot (2x + 3)$$

$$f'(3) = \frac{1}{2} \cdot 20^{-1/2} \cdot 9 = \frac{9}{4\sqrt{5}}$$

Örnek...11 :

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ise $f'(1) = ?$

$$f(x) = (x + x^{1/2})^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x + x^{1/2})^{-1/2} \cdot (1 + \frac{1}{2} x^{-1/2})$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-1/2} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

Örnek...12 :

$g^2(x^3 + 1) = f^3(x^2 + 1) \cdot h(3x - 1)$ için

$f(2) = 3$	$g(2) = -2$	$h(2) = -1$
$f'(2) = 4$	$g'(2) = 1$	$h'(2) = ?$

$$2g(x^2 + 1) \cdot g'(x^2 + 1) \cdot 3x^2 = 3f^2(x^2 + 1) \cdot f'(x^2 + 1) \cdot 2x \cdot h(3x - 1) + h'(3x - 1) \cdot f^3(x^2 + 1)$$

$$x = 1$$

$$2g(2) \cdot g'(2) \cdot 3 = 3f^2(2) \cdot f'(2) \cdot 2h(2) + h'(2) \cdot f^3(2)$$

$$2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 3 = 3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2(-1) + h' \cdot 27$$

$$-12 = -216 + 27h'$$

$$h' = \frac{204}{27} = \frac{68}{9}$$

Örnek...13 :

$f(x) = 2x^2 - 3x$ ve $g(x) = x - x^2$, $h(x) = 3x - 4$ ise $(h \circ g \circ f)'(2) = ?$

$$(h \circ g \circ f)'(2) = h'(g \circ f(2)) \cdot (g \circ f(2))' \cdot f'(2)$$

$$= 3 \cdot (1 - 4) \cdot (8 - 3)$$

$$= 3 \cdot (-3) \cdot 5 = -45$$

ZİNCİR KURALI

$$y = f(u) \text{ ise } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

olarak hesaplanır.

Örnek...1 :

$y = u^2 - 2u$, $u = x^3 - x$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (2u - 2) \cdot (3x^2 - 1)$$

$$= [2(x^3 - x) - 2] (3x^2 - 1)$$

$$= (2x^3 - 2x - 2) (3x^2 - 1)$$

Örnek...2 :

$y = 3x^2 - 2x$, $x = \frac{1}{u}$, $u = n^2 - 3n + 1$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dn}$ $n = 0$ için kaçtır?

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dn}$$

$$= (6x - 2) \cdot \frac{-1}{u^2} \cdot 2n - 3$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 12$$

Örnek...3 :

$y = t^2 + 5t$, $t = 6u^2$, $u = 2x - 3$ ise $\frac{dy}{dx}$ $x = 1$ için kaçtır?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (2t + 5) \cdot 12u \cdot 2$$

$$= 17 \cdot (-12) \cdot 2 = -408$$

TÜREV - 3

KURALLAR-2

ÖZEL TANIMLI TÜREVİ

a) Parçalı Fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x < a \\ h(x) & x \geq a \end{cases} \text{ fonksiyonunun türevi}$$

alınırken parçaların türevi alınır, kritik noktalarda önce süreklilik sonra türev araştırılır ve türev varsa parçalardan birine eklenir.

Örnek...1 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevini alınız

ilk hal $f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$ ayrıca $x=1$ de fonksiyon süreklidir.

son hal $f'(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ $f'(1^+) = 2$
 $f'(1^-) = 2$

Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevini alınız.

ilk hal $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$ ayrıca $x=1$ de fonksiyon süreklidir.

son hal $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$ $f'(1^+) = 2$
 $f'(1^-) = 3$
 $x=1$ de türev yok

b) Mutlak Değer Fonksiyonu

$f(x) = |x-a|$ fonksiyonunun türevi alınırken kritik noktalar dışında fonksiyon önce tanımlanır sonra türev alınır. Kritik noktalarda önce süreklilik araştırılır süreklilik varsa sağ ve sol türevler araştırılır.

Örnek...3 :

$f(x) = |x-1|$ fonksiyonunun türevini alınız.

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$

$|x-1|' = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$ ayrıca $x=1$ de fonksiyon süreklidir.

son hal $f'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$ $f'(1^+) = 1$
 $f'(1^-) = -1$
 $x=1$ de türev yoktur

Örnek...4 :

$f(x) = |(x-1)^3|$ fonksiyonunun türevini alınız.

$|(x-1)^3| = \begin{cases} (x-1)^3 & x \geq 1 \\ -(x-1)^3 & x < 1 \end{cases}$ $|(x-1)^3|' = \begin{cases} 3(x-1)^2 & x \geq 1 \\ -3(x-1)^2 & x < 1 \end{cases}$

$x=1$ de fonksiyon süreklidir

$f'(1^+) = 0 = f'(1^-)$

$|(x-1)^3|' = \begin{cases} 3(x-1)^2 & x \geq 1 \\ -3(x-1)^2 & x < 1 \end{cases}$

DEĞERLENDİRME

1) $f(x) = 2x^3 + 3x$, $g(x) = x^3 - 4$ ise $(f \circ g)'(1) = ?$

$f'(g(1)) \cdot g'(1)$ $f'(x) = 6x^2 + 3$
 $f'(3) \cdot 3$ $g'(x) = 3x^2$
 $57 \cdot 3 = 171$

2) $f(2x^3 + 3) = 6x^2 - 3x + 2$ ise $f'(1) = ?$

$f'(2x^3 + 3) \cdot 6x^2 = 12x - 3$
 $x = -1 \Rightarrow f'(1) \cdot 6 = -15$
 $f'(1) = \frac{-15}{6} = -\frac{5}{2}$

3) $f(x) = (2x^4 - 3x + 1)^5$ ise $f'(2) = ?$

$f'(x) = 5(2x^4 - 3x + 1)^4 \cdot (8x^3 - 3)$
 $x=2$
 $f'(2) = 5 \cdot (32 - 6 + 1)^4 \cdot (64 - 3)$
 $= 5 \cdot 27^4 \cdot 61$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$ ise $f'(1) = ?$

$f'(x) = \frac{1}{3} (x + x^{1/2})^{-2/3} \cdot (1 + \frac{1}{2} x^{-1/2})$
 $f'(1) = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2/3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$

TÜREV - 3

KURALLAR-2

- 5) $f^2(x^2-2) = g^2(\frac{x^3}{2}-2) \cdot h(2x^2-3x)$ için
 $f(2)=1, g(2)=4, h(2)=-2, f'(2)=-2$ ve $g'(2)=-3$
 olduğuna göre, $h'(2)$ kaçtır?

$$2 \cdot f(x^2-2) \cdot f'(x^2-2) \cdot 2x = 2g(\frac{x^3}{2}-2) \cdot g'(\frac{x^3}{2}-2) \cdot \frac{3x^2}{2} \cdot h(2x^2-3x) + h'(2x^2-3x) \cdot (4x-3)$$

$$x=2 \Rightarrow 2 \cdot f(2) \cdot f'(2) \cdot 4 = 2g(2) \cdot g'(2) \cdot 6 \cdot h(2) + h'(2) \cdot 5 \cdot g^2(2)$$

$$-16 = -288 + h'(2) \cdot 80 \rightarrow h'(2) = \frac{272}{80} = \frac{68}{20} = \frac{17}{5}$$

- 6) $y = x^2 - 2x$, $x = u^3 + 5u - 32$ ise $\frac{dy}{du} = ?$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$$

$$= (2x-2) \cdot (3u^2+5)$$

$$= [2(u^3+5u-32)-2] \cdot [3u^2+5]$$

- 7) $y = x^2 + 3x$, $x = t^3 + t$, $t = u^2 - 3u + 1$ ise $\frac{dy}{du}$ nun $u=0$ için değeri kaçtır?

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du}$$

$$= (2x+3) \cdot (3t^2+1) \cdot (2u-3)$$

$$= 7 \cdot 4 \cdot (-3) = -84$$

$u=0$
 $t=1$
 $x=2$

- 8) $x=2t$ ve $y=2t^2+3t$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx} = ?$ (Önce $y=f(x)$ i elde ediniz)

$$t = \frac{x}{2} \quad y = 2 \cdot \frac{x^2}{4} + 3 \cdot \frac{x}{2}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2}$$

$$y' = \frac{2x}{2} + \frac{3}{2} = x + \frac{3}{2}$$

- 9) Fonksiyonların önce terslerini sonra türevlerini bulunuz

- a) $f: (-\infty, -3) \rightarrow (-6, \infty)$, $f(x) = x^2 + 6x + 3$ ise $(f^{-1})'(x) = ?$

$$y = x^2 + 6x + 3 \quad y = (x+3)^2 - 6$$

$$\sqrt{y+6} = |x+3|$$

$$\sqrt{y+6} = -x-3$$

$$x = -\sqrt{y+6} - 3$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+6} - 3$$

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{2}(x+6)^{-1/2} = \frac{-1}{2\sqrt{x+6}}$$

- b) Uygun şartlarda tanımlı $f(x) = \sqrt{x+2}$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(x) = ?$

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$y = \sqrt{x+2}$$

$$y^2 = x+2$$

$$x = y^2 - 2$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

- c) $f: \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{4}{3}\}$, $f(x) = \frac{4x-7}{3x-5}$ ise

$(f^{-1})'(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$f^{-1}(x) = \frac{5x-7}{3x-4}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{5(3x-4) - 3(5x-7)}{(3x-4)^2} = \frac{21}{(3x-4)^2} > 0$$

$$1 + \frac{4}{3} + \dots$$

$$G = \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2$ ise $(f^{-1})'(34) = ?$

$$f^{-1}(x^5+2) = x$$

$$(f^{-1})'(x^5+2) \cdot 5x^4 = 1$$

$$x=2 \Rightarrow (f^{-1})'(34) \cdot 80 = 1 \rightarrow (f^{-1})'(34) = 1/80$$