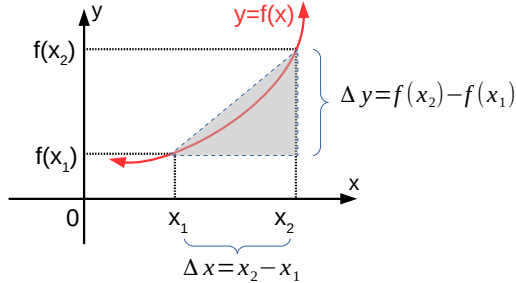


TÜREV - 1

KAVRAM

ORTALAMA DEĞİŞİM

Şekli inceleyiniz.



ortalama değişim $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ olarak

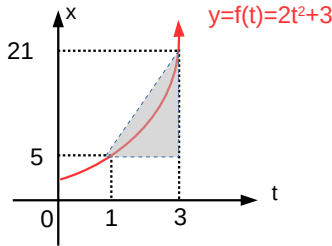
tanımlanır.

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ifadesinde $x_2=x_1+h$ alınır ve

h sayısına küçük değerler verilirse **anlık değişim** elde edilir

Ortalama hız, konum değişiminin zamandaki değişime oranıdır.

Örnek...1 :



Yukarıda x (konum) t (zaman) grafiği verilen bir hareketlinin

a) 1. ve 3. saniyeler arası ortalama hızını bulunuz.

$$\frac{v(3)-v(1)}{3-1} = \frac{21-5}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

b) 3.saniyedeki anlık hızını bulunuz. Bunun için $t=3$, $t=3+h$ anları için önce ortalama hızı, sonra da hesaplanan bu hızın h çok küçük değerler alırken değerini hesaplayınız

$$\begin{aligned} \frac{v(3+h)-v(3)}{h} &= \frac{2(3+h)^2+3-21}{h} \\ &= \frac{18+12h+2h^2+3-21}{h} = \frac{2h^2+12h}{h} \\ &= 2h+12 \quad | h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

BİR NOKTADA TÜREV

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ limiti mevcut ise bu limit değerine f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi denir. f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$ $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ sembollerinden biri ile gösterilebilir. Eğer bir fonksiyonun x_0 noktasında türevi varsa fonksiyon o noktada türevlenebilir denir.

Örnek...2 :

$f(x)=x^2$ fonksiyonu için $x=2$ noktasındaki türevi türev tanımını kullanarak bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

HATIRLATMA:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ değerinin olabilmesi için

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ olması gerekirdi.

Benzer şekilde f fonksiyonun x_0 noktasında türevinin yani

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ limitinin olabilmesi için

(1) $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ ve

(2) $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ limitlerinin mevcut olması ve bu limitlerin birbirine eşit olması gerekir.

Burada (1) e fonksiyonun $x=x_0$ noktasında sağdan türevi (2) ye ise fonksiyonun $x=x_0$ noktasında soldan türevi denir.

Kritik noktaya sahip fonksiyonlar eğer

1. bu noktada sürekli
2. bu noktada sağdan ve soldan aynı türev değerlerine sahipse, türeve sahiptir.

TÜREV - 1

KAVRAM

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda türevli midir?

önce süreklilik $f(1^+) = 1$
 $f(1^-) = 2-3 = -1$
sürekli olmadığından türevi yoktur

Örnek...4 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=1$ noktasında türevli midir?

önce süreklilik $f(1^+) = 1 = f(1^-) = f(1)$

sol türev $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$

sağ türev $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

$x=1$ de türev yoktur

sağ türev 2 sol türev 3 olduğuna dikkat ediniz
fonksiyonun $x=1$ noktasında sürekli olmasına rağmen
türevli olmadığını farkediniz

Örnek...5 :

$f(x) = |x|$ fonksiyonun $x=0$ noktasında türevi
var mıdır?

$x=0$ için fonksiyon sürekli

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

türevler farklı olduğuydu türevsizdir.

Not $y=|x|$  $x=0$ için grafikte
köşe olduğuna dikkat

NOT

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \text{ ifadesinde } x = x_0 + h$$

alınırsa $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$ olarak
yeniden yazılmış olur.

Örnek...6 :

$y = f(x) = 3x + 1$ fonksiyonu için $f'(5) = ?$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{3(5+h) + 1 - 16}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$$f'(5) = 3$$

TÜREV FONKSİYONU

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
 $[a, b]$ nin alt kümesinden $\mathbb{R}$ ye

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyona f
fonksiyonun türev fonksiyonu denir.

Örnek...7 :

$f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu için $f'(x)$ fonksiyonunu
hesaplayınız.

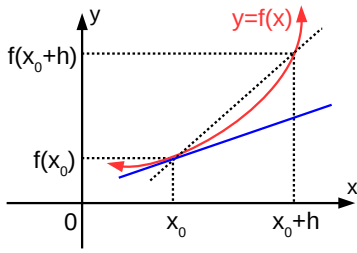
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h \quad (h \rightarrow 0) \\ &= 2x \end{aligned}$$

$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$

TÜREV - 1

KAVRAM

TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ



Şekilden de anlaşılacağı gibi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) \text{ limit değeri eğer}$$

varsa $x=x_0$ noktasında çizilen teğetin eğimini verir. Başka bir deyişle $f'(x_0)$ değeri $y=f(x)$ eğrisine $x=x_0$ noktasında çizilen teğetin eğimidir.

TEOREM (TÜREV SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ)

Bir fonksiyon bir noktada **türevli** ise o noktada **sürekli**dir.

TEOREMİN SONUÇLARI

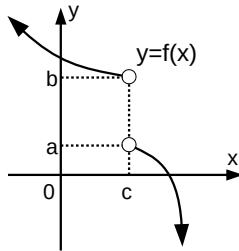
- 1) $f(x)$ fonksiyonu herhangi bir noktada **sürekli değilse** bu noktada **türevli de değildir**.
- 2) $f(x)$ fonksiyonu sürekli iken türevli **olmayabilir**.

Örneğin $f(x)$ grafiğinde köşelere sahip olduğu noktalarda türev değerine sahip değildir.

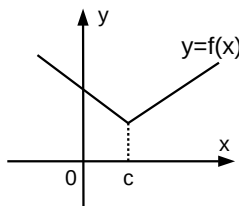
Aşağıdaki örneğin şekillerini inceleyiniz.

Örnek...8 :

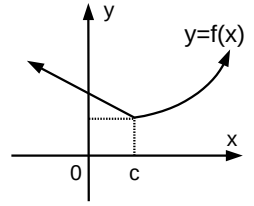
- a) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında **sürekli** olduğundan türevsizdir.



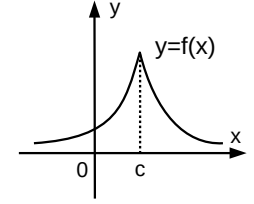
- b) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



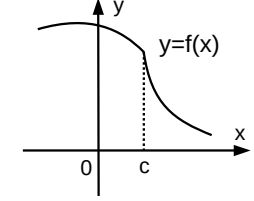
- c) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



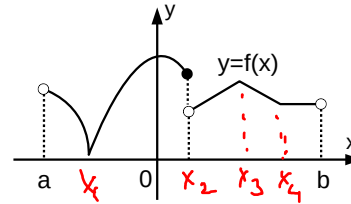
- d) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



- e) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında teğetin eğimi sonsuz olduğundan türevsizdir.



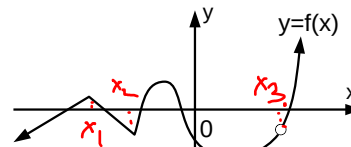
Örnek...9 :



(a,b) aralığında $y=f(x)$ fonksiyonu kaç noktada türevine sahip değildir?

$x_1, x_3, x_4 \rightarrow$ köşe $\rightarrow$ 4 noktada türevsizdir
 $x_2 \rightarrow$ süreksizlik

Örnek...10 :



Şekilde grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

$x_1, x_2 \rightarrow$ köşe $\rightarrow$ 3 noktada türev yok
 $x_3 \rightarrow$ süreksizlik

TÜREV - 1

KAVRAM

Örnek...11 :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x + a}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}'$ de türevli ise a nasıl seçilmelidir?

$$x^2 - x + a > 0 \quad \Delta < 0 \quad 1 - 4a < 0$$

$$a > \frac{1}{4}$$

Örnek...12 :

$$f(x) = \begin{cases} 6x + ax^2 & x < 0 \\ 2kx + c + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu Reel sayılar kümesinde türevli ise c kaçtır?

örneğin süreklilik

$$f(0^+) = c + 1 = f(0^-) = 0$$

$$c = -1$$

genellikle sağ sol türevlere bakardık

DEĞERLENDİRME

1) $f(x) = 3x + 5$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \right) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3x + 5 - 17}{x - 4} \right) = \frac{3(x - 4)}{x - 4} = 3$$

2) $f(x) = 3x^2$ ise $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = ?$

$$\frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \frac{6xh + 3h^2}{h} = 6x + 3h \quad (h \rightarrow 0)$$

$$= 6x$$

3) $f(x) = x^3$ fonksiyonu için türev tanımını kullanarak $x=2$ noktasındaki türevini bulunuz.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$

$$= x^2 + 2x + 4 \quad x=2$$

$$= 4 + 4 + 4 = 12$$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$

fonksiyonu $x=0$ noktasında türevli midir?

örneğin süreklilik $f(0^+) = 0 = f(0^-) = f(0)$

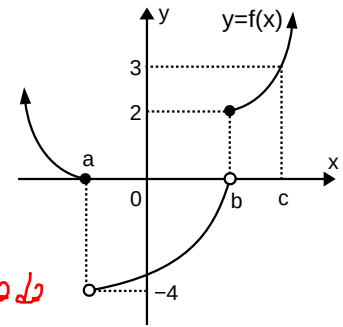
sonra sağ sol türevler

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{3x - 0}{x - 0} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0}{x - 0} = x = 0$$

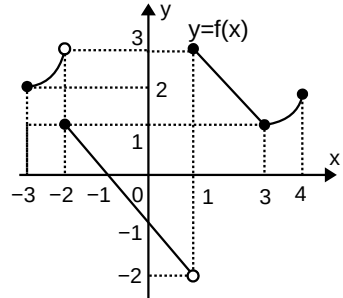
$x=0$ için türev yoktur

5) Yanda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun reel sayılarda kaç noktada türevi yoktur?



$x=0$
 $x=2$ 2 noktada türev yok!

6) Yanda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için, $(-3, 4)$ aralığında kaç noktada sürekli olduğu halde türevi yoktur?



$$x=3$$

1 noktada sürekli fakat türevsizdir

7) $f(x) = \frac{mx+2}{mx^2-x+3}$ fonksiyonu $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ de türevli ise m nasıl seçilmelidir?

$$\Delta > 0 \quad mx^2 - x + 3 > 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 > 0$$

$$m < \frac{1}{12}$$

$$m \in (-\infty, \frac{1}{12})$$