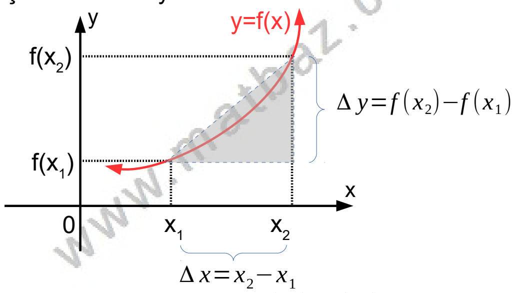
TÜREV – 1

KAVRAM

ORTALAMA DEĞİŞİM

Şekli inceleyiniz.

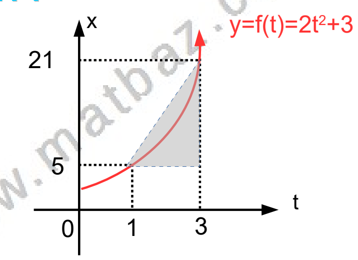


ortalama değişim $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ olarak tanımlanır.

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ifadesinde $x_2=x_1+h$ alınır ve h sayısına küçük değerler verilirse anlık değişim elde edilir

Ortalama hız, konum değişiminin zamandaki değişime oranıdır.

Örnek...1 :



Yukarıda x(konum) t(zaman) grafiği verilen bir hareketlinin

a) 1. ve 3. saniyeler arası ortalama hızını bulunuz.

b) 3.saniyedeki anlık hızını bulunuz. Bunun için t=3 , t=3+h anları için önce ortala ortalama hızı , sonra da hesaplanan bu hızın h çok küçük değerler alırken değerini hesaplayınız

BİR NOKTADA TÜREV

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ limiti mevcut ise bu limit değerine f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi denir.

f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$ $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ sembollerinden biri ile gösterilebilir. Eğer bir fonksiyonun x_0 noktasında türevi varsa fonksiyon o noktada türevlenebilir denir.

Örnek...2 :

$f(x)=x^2$ fonksiyonu için x=2 noktasındaki türevi türev tanımını kullanarak bulunuz.

HATIRLATMA:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ değerinin olabilmesi için

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ olması gerekirdi.

Benzer şekilde f fonksiyonun x_0 noktasında türevinin yani

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ limitinin olabilmesi için

(1) $f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ ve

(2) $f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ limitlerinin

mevcut olması ve bu limitlerin birbirine eşit olması gerekir.

Burada (1) e fonksiyonun $x=x_0$ noktasında sağdan türevi (2) ye ise fonksiyonun $x=x_0$ noktasında soldan türevi denir.

Kritik noktaya sahip fonksiyonlar eğer
1. bu noktada sürekli
2. bu noktada sağdan ve soldan aynı türev değerlerine sahipse, türeve sahiptir.

Örnek...3 :

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & x<1 \\ x^2 & x\geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda türevli midir?

Örnek...4 :

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x<1 \\ x^2 & x\geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu x=1 noktasında türevli midir?

Örnek...5 :

$f(x)=|x|$ fonksiyonun x=0 noktasında türevi var mıdır?

NOT

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ ifadesinde $x=x_0+h$ alınırsa $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ olarak yeniden yazılmış olur.

Örnek...6 :

$y=f(x)=3x+1$ fonksiyonu için $f'(5)=?$

TÜREV FONKSİYONU

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ nin alt kümesinden $\mathbb{R}$ ye

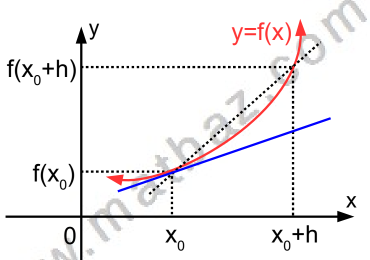
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyona f fonksiyonun türev fonksiyonu denir.

Örnek...7 :

$f(x)=x^2+1$ fonksiyonu için $f'(x)$ fonksiyonunu hesaplayınız.

TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ



Şekilden de anlaşılacağı gibi $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ limit değeri eğer varsa $x=x_0$ noktasında çizilen teğetin eğimini verir. Başka bir deyişle $f'(x_0)$ değeri y=f(x) eğrisine x= x_0 noktasında çizilen teğetin eğimidir.

TEOREM (TÜREV SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ)

Bir fonksiyon bir noktada **türevli** ise o noktada **süreklidir**.

TEOREMİN SONUÇLARI

1) f(x) fonksiyonu herhangi bir noktada **sürekli değilse** bu noktada **türevli de değildir**.

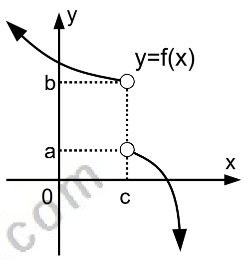
2) f(x) fonksiyonu sürekli iken türevli **olmayabilir**.

Örneğin f(x) grafiğinde köşelere sahip olduğu noktalarda türev değerine sahip değildir.

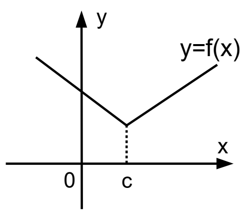
Aşağıdaki örneğin şekillerini inceleyiniz.

Örnek...8 :

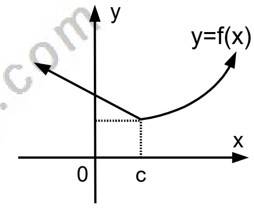
a)
y=f(x) fonksiyonu x=c noktasında süreksiz olduğundan türevsizdir.



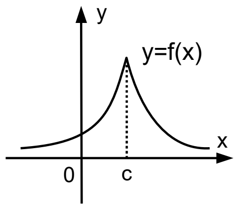
b)
y=f(x) fonksiyonu x=c noktasında köşeye sahip olduğundan olduğundan türevsizdir.



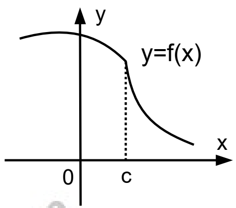
c)
y=f(x) fonksiyonu x=c noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



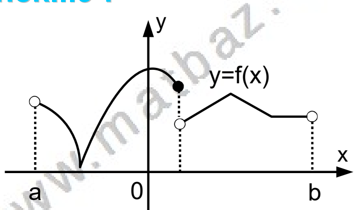
d)
y=f(x) fonksiyonu x=c noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



e)
y=f(x) fonksiyonu x=c noktasında teğetin eğimi sonsuz olduğundan türevsizdir.

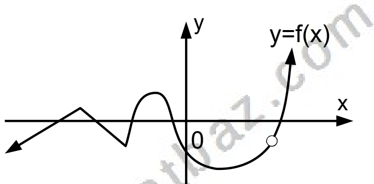


Örnek...9 :



(a,b) aralığında y=f(x) fonksiyonu kaç noktada türeve sahip değildir?

Örnek...10 :



Şekilde grafiği verilen y=f(x) fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

Örnek...11 :

$$f(x)=\frac{3}{x^2-x+a}$$

fonksiyonu R' de türevli ise a nasıl seçilmelidir?

Örnek...12 :

$$f(x)=\begin{cases}6x+ax^2 & x<0\\ 2kx+c+1 & x\geq 0\end{cases}$$

fonksiyonu Reel sayılar kümesinde türevli ise c kaçtır?

DEĞERLENDİRME

1) f(x)=3x+5 olmak üzere, $\lim_{x\to 4}\left(\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\right)=?$

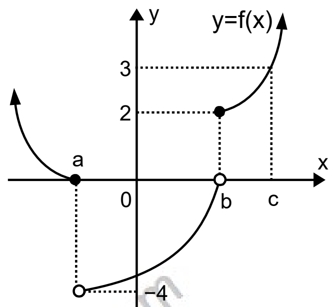
2) $f(x)=3x^2$ ise $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=?$

3) $f(x)=x^3$ fonksiyonu için türev tanımını kullanarak x=2 noktasındaki türevini bulunuz.

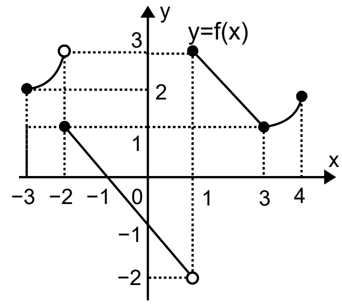
4) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 3x & x\geq 0\end{cases}$

fonksiyonu x=0 noktasında türevli midir?

5) Yanda grafiği verilen y=f(x) fonksiyonunun reel sayılarda kaç noktada türevi yoktur?



6) Yanda grafiği verilen y=f(x) fonksiyonu için, (-3,4) aralığında kaç noktada sürekli olduğu halde türevi yoktur?



7) $f(x)=\frac{mx+2}{mx^2-x+3}$ fonksiyonu $\mathbb{R}\setminus\{a,b\}$ de türevli ise m nasıl seçilmelidir?