

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$ için $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
 $a \in A$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ oluyorsa

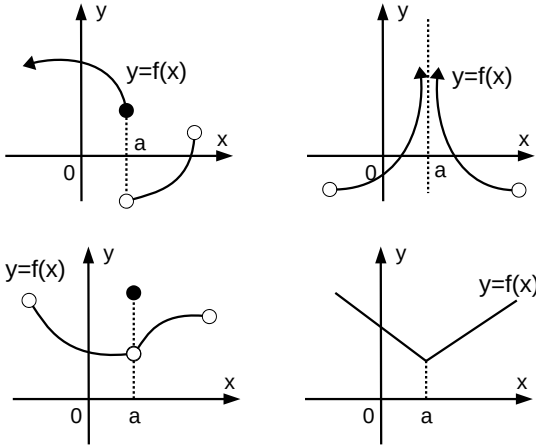
f fonksiyonu a noktasında sürekli denir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyona o noktada **süresiz bir fonksiyon** denir.

Tanıma göre f a da sürekli ise:

- 1) f fonksiyonu a da tanımlı,
 - 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ var ve
 - 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- koşullarının üçü de gerçekleşmelidir.

Örnek...1 :

Grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyonlar $x=a$ noktasında sürekli midir?



Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x \geq 3 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} & ; x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=3$ noktasında sürekli ise a kaçtır?

$$\begin{aligned} 3^+ &\rightarrow 9 + a \\ 3^- &\rightarrow \frac{9-3}{9-4} = \frac{6}{5} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 9 + a &= \frac{6}{5} \\ a &= -\frac{39}{5} \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x-1} & ; x=0 \\ \frac{1+\sin x}{2+x} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli ise a kaçtır?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \frac{1+\sin 0}{2+0} = a \cdot e^{0-1} = \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{1}{2e}$$

Örnek...4 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{41}}{x^3 - x}$$

fonksiyonu hangi noktalarda süresizdir?

$$x^3 - x = 0 \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$$

Bu noktalar süresizdir.

TANIM KÜMESİNDE SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
Her $x \in A$ için f fonksiyonu sürekli ise f tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir. Örneğin polinom fonksiyonlar tanım kümesinde sürekli olan fonksiyonlardır.

SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

- 1) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ise f soldan sürekli
 - 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ise f sağdan süresizdir denir.
- Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için sağdan ve soldan sürekli olması gerekir.

Örnek...5 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; x < 5 \\ ax + 4 & ; x = 5 \\ (b-3)x + 4a & ; x > 5 \end{cases}$$

fonksiyonu 5 noktasında sağdan sürekli ise $a=5b$ kaçtır?

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) \Rightarrow 5(b-3) + 4a = 25 + 4$$
$$5b - 2 = 19$$

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

SÜREKSİZLİK

$I \subset \mathbb{R}$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x=a$ noktasında sürekli değil ise f fonksiyonu $x=a$ noktasında süreksizdir denir.

BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

1) RASYONEL FONKSİYONLAR :

$f(x)=P(x)/Q(x)$ ve $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyonlar ise $Q(x)=0$ olduğu noktalarda f de tanımsız olacağından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

Örnek...6 :

$f(x)=\frac{5x-3}{x^2-5x+6}$ fonksiyonun süreksiz olduğu noktaların apsileri toplamı kaçtır?

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_1+x_2=5 \quad \left(-\frac{b}{a}\right)$$

2) İRRASYONEL FONKSİYONLAR:

$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x) \geq 0$ için süreklidir.

Örnek...7 :

$f(x)=\sqrt[12]{2x-3}$ ve $g(x)=\frac{x^2}{x^2-x^4}$ fonksiyonları

hangi noktalarda süreklidir?

$$\begin{aligned} & \rightarrow 2x-3 \geq 0 \quad x \geq 3/2 \\ & \rightarrow x^2-x^4=0 \quad x^2(1-x^2)=0 \\ & \rightarrow x^2=0 \quad x=0 \\ & \rightarrow x^2=1 \quad x=\pm 1 \end{aligned}$$

3) PARÇALI FONKSİYONLAR :

Dalları oluşturan fonksiyonlarla beraber kritik noktalarda (yani fonksiyonun kural değiştirdiği noktalarda) süreklilik olup olmadığını araştırılmalıdır.

Örnek...8 :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x+1} ; & x < 0 \\ \ln(x+1) ; & x = 0 \\ \frac{x}{x^2-1} ; & x > 0 \end{cases}$$

kaç noktada süreksizdir?

$$0^- \rightarrow \frac{\sin 0}{0+1} = 0$$

$$0^+ \rightarrow \frac{0}{0-1} = 0$$

$$f(0)=\ln 1=0$$

$x=0$ için süreklidir.
 $x=1$ için tanımsızdır.
(süreksizdir)

bir noktada

Örnek...9 :

Fonksiyonların sürekli oldukları aralıkları yazınız?

$$a) f(x)=3x^2-5x+2 \quad \mathbb{R}$$

$$b) h(x)=\frac{\sin x}{2-\cos x} \quad \mathbb{R}$$

$$c) u(x)=\sqrt{x^2-x+12} \quad \mathbb{R}$$

$$d) v(x)=\sqrt[3]{x-12} \quad \mathbb{R}$$

$$e) t(x)=\begin{cases} x^2-x ; & x \leq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-4} ; & x > 0 \end{cases} \quad x=0 \text{ de süreklidir}$$

Örnek...10 :

$$t(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} ; & x \neq 3 \\ \frac{m \cdot \cos(x-3)}{x^2+9} ; & x=3 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda sürekli ise m değeri kaçtır?

$$x=3 \text{ de sürekli olsun} \quad 3^+ = 3^- = \frac{x^2-9}{x-3} = (x+3) = 6$$
$$f(3) = \frac{m \cdot \cos 0}{9+9} = \frac{m}{18} \quad \frac{m}{18} = 6 \rightarrow m = 108$$

BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x=a \in A$ da sürekli iki fonksiyon ise $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ve $k \cdot f$ ($k \in \mathbb{R}$) fonksiyonları da sürekli olur.

KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanım kümesinde sürekli bir fonksiyon ise

- 1) f fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır. Yani Her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| < B$ olacak şekilde $B \in \mathbb{R}$ vardır.
- 2) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.
- 3) $a < x_1 < x_2 < b$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise Bazı $c \in (x_1, x_2)$ öyle ki $f(c) \in (f(x_1), f(x_2))$

Örnek...11 :

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=x^2+3x$ fonksiyonu x eksenini keser mi?

$$f(-2) = 4-6 = -2 < 0 \quad \text{ve } f \text{ sürekli olduğundan}$$
$$f(1) = 1+3 = 4 > 0 \quad \text{en az bir noktada } x \text{ eksenini keser!}$$

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

$$(x-6)(x+2)$$

DEĞERLENDİRME

$$\frac{x^2-4x-12}{x^2} \geq 0$$

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x-12}{x^2}}$
fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

$$\frac{-2 \quad 0 \quad 6}{+ \quad - \quad - \quad +} \quad (-2, 6) \text{ süreksizdir}$$

2) $f(x) = \sqrt{9-|4x-12|}$
fonksiyonunu sürekli yapan x değerleri nedir?

$$\begin{aligned} 9-|4x-12| &\geq 0 \\ |4x-12| &\leq 9 \\ -9 &\leq 4x-12 \leq 9 \\ \frac{3}{4} &\leq x \leq \frac{21}{4} \end{aligned}$$

3) $v(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-1}}$
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

$$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

4) $g(x) = \log_{x-2}(\ln x)$
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

$$\begin{aligned} x-2 &> 0 \rightarrow x > 2 \\ x-2 &\neq 1 \rightarrow x \neq 3 \\ \ln x &> 0 \rightarrow x > 1 \\ x &> 0 \rightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$\text{kesele } (2, \infty) - \{3\}$$

5) $f(x) = 2^{\frac{x^2}{x^2-5}}$
fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

$$x^2-5=0 \quad x = \pm\sqrt{5}$$

6) $f(x) = \begin{cases} x^2-a ; & x < 3 \\ ax+b ; & x = 3 \\ bx+2 ; & x > 3 \end{cases}$
sürekli bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

$$\begin{aligned} 3^+ &= 3^- = f(3) \\ 3b+2 &= 9-a = 3a+b \\ \begin{cases} 2+3b=7 \\ 4a+b=9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{20}{11} \\ b=\frac{19}{11} \end{cases} \end{aligned}$$

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2-7} ; & x < 3 \\ \frac{ax}{x+2} ; & x = 3 \\ bx-2 ; & x > 3 \end{cases}$
fonksiyonu tam olarak 2 noktada süreksiz bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

$$\begin{aligned} 3^+ &= 3b-2 \\ 3^- &= \frac{a}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2/3 \end{cases} \\ f(3) &= \frac{3a}{5} \end{aligned}$$

8) $g(x) = \frac{\sin x}{1+2\cos x}$
fonksiyonunu $[0, 2\pi)$ aralığında süreksiz yapan x değerleri kaç tanedir?

$$\begin{aligned} 1+2\cos x &= 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos 120 \\ x &= 120 + k \cdot 360 \quad x = -120 + k \cdot 360 \\ x &= 120 \quad x = 240 \end{aligned}$$

$$\text{2 değer}$$

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

9)

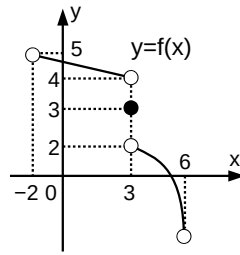
$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x - m}$
fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli ise m nasıl seçilmelidir?

$$\Delta \leq 0 \quad 49 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) \leq 0$$

$$4m \leq -49$$

$$m \leq -\frac{49}{4}$$

10) Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonu $(-2, 6)$ aralığında sürekli olduğu x tam sayı değerleri toplamı kaçtır?



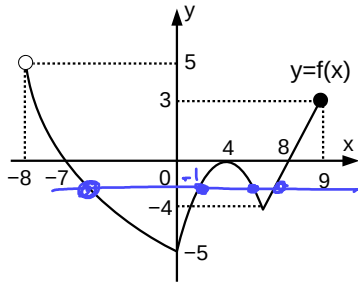
-1 ✓ 0 ✓
1 ✓ 2 ✓
3 x 4 ✓
5 ✓

$$-1 + 1 + 2 + 4 + 5 = 11$$

11) Grafiğe göre

$$g(x) = \frac{1}{1+f(x)}$$

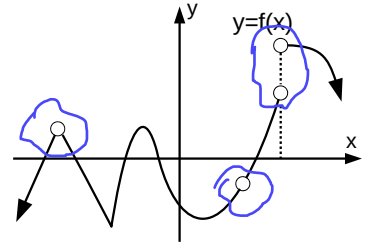
fonksiyonu $(-8, 9)$ aralığında kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



$$1 + f(x) = 0 \rightarrow f(x) = -1$$

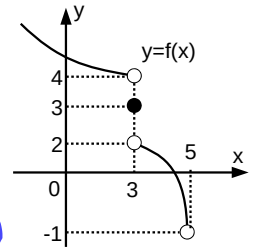
4 değer

12) Grafiğe göre $y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?

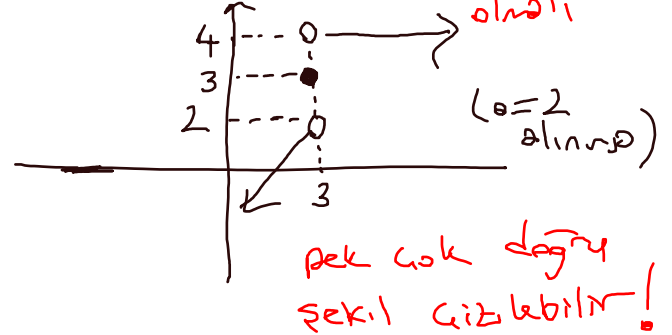


3 değer

13) Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği veriliyor $f(x)+g(x)$ süreklidir. Buna göre $g(x)$ fonksiyonu nasıl bir grafiğe sahip olabilir, çiziniz?



$$\begin{array}{ccc} 3^- & 3^+ & f(3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 3 \\ g(3^-) & g(3^+) & g(3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2+2 & 2+1 \end{array}$$



Limit konusuna katkıları için araştırınız
Salih Zeki