

## LİMİT - 4

### SÜREKLİLİK

#### FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

##### BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$  için  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  
 $a \in A$  olmak üzere,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  oluyorsa

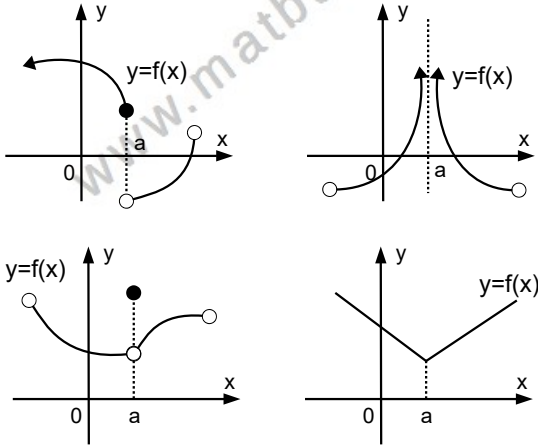
**f fonksiyonu a noktasında sürekli** denir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyona o noktada **süresiz bir fonksiyon** denir.

Tanıma göre f a da sürekli ise:

- 1) f fonksiyonu a da tanımlı,
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  var ve
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$   
koşullarının üçü de gerçekleşmelidir.

##### Örnek...1 :

Grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyonlar  $x=a$  noktasında sürekli midir?



##### Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x \geq 3 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} & ; x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonu  $x=3$  noktasında sürekli ise a kaçtır?

##### Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x-1} & ; x = 0 \\ \frac{1 + \sin x}{2 + x} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu  $x=0$  noktasında sürekli ise a kaçtır?

##### Örnek...4 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{41}}{x^3 - x}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

#### TANIM KÜMESİNDE SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$  ve  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in A$  için f fonksiyonu sürekli ise f tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir. Örneğin polinom fonksiyonlar tanım kümesinde sürekli olan fonksiyonlardır.

#### SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  ise f soldan sürekli
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  ise f sağdan sürekli dir denir.  
Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için sağdan ve soldan sürekli olması gerekir.

##### Örnek...5 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; x < 5 \\ ax + 4 & ; x = 5 \\ (b-3)x + 4a & ; x > 5 \end{cases}$$

fonksiyonu 5 noktasında sağdan sürekli ise  $a-5b$  kaçtır?

## LİMİT - 4

### SÜREKLİLİK

#### SÜREKSİZLİK

$I \subset \mathbb{R}$  ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $x=a$  noktasında sürekli değil ise  $f$  fonksiyonu  $x=a$  noktasında süreksizdir denir.

#### BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

##### 1) RASYONEL FONKSİYONLAR :

$f(x)=P(x)/Q(x)$  ve  $P(x)$  ve  $Q(x)$  polinom fonksiyonlar ise  $Q(x)=0$  olduğu noktalarda  $f$  de tanımsız olacağından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

#### Örnek...6 :

$f(x)=\frac{5x-3}{x^2-5x+6}$  fonksiyonun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

##### 2) İRRASYONEL FONKSİYONLAR:

$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$  fonksiyonu  $g(x) \geq 0$  için süreklidir.

#### Örnek...7 :

$f(x)=\sqrt[12]{2x-3}$  ve  $g(x)=\frac{x^2}{x^2-x^4}$  fonksiyonlarının sürekli oldukları en geniş kümeleri bulunuz.

##### 3) PARÇALI FONKSİYONLAR :

Dalları oluşturan fonksiyonlarla beraber kritik noktalarda (yani fonksiyonun kural değiştirdiği noktalarda) süreklilik olup olmadığı araştırılmalıdır.

#### Örnek...8 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x+1} ; & x < 0 \\ \ln(x+1) ; & x = 0 \\ \frac{x}{x^2-1} ; & x > 0 \end{cases}$$

kaç noktada süreksizdir?

#### Örnek...9 :

Fonksiyonların sürekli oldukları en geniş kümeleri bulunuz.

a)  $f(x)=3x^2-5x+2$

b)  $h(x)=\frac{\sin x}{2-\cos x}$

c)  $u(x)=\sqrt{x^2-x+12}$

d)  $v(x)=\sqrt[3]{x-12}$

e)  $t(x) = \begin{cases} x^2-x ; & x \leq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-4} ; & x > 0 \end{cases}$

#### Örnek...10 :

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} ; & x \neq 3 \\ \frac{m \cdot \cos(x-3)}{x^2+9} ; & x = 3 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda sürekli ise  $m$  değeri kaçtır?

#### BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A \subset \mathbb{R}$  olmak üzere  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$   $x=a \in A$  da sürekli iki fonksiyon ise  $f \pm g$   $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  [ $g(a) \neq 0$ ] ve  $k \cdot f$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) fonksiyonları da sürekli olur.

#### KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tanım kümesinde sürekli bir fonksiyon ise

- 1)  $f$  fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır. Yani Her  $x \in \mathbb{R}$  için  $|f(x)| < B$  olacak şekilde  $B \in \mathbb{R}$  vardır.
- 2)  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.
- 3)  $a < x_1 < x_2 < b$  için  $f(x_1) \neq f(x_2)$  ise  $\exists c \in (x_1, x_2)$  öyle ki  $f(c) \in ((f(x_1), f(x_2)))$

#### Örnek...11 :

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x)=x^2+3x$  fonksiyonu  $x$  eksenini keser mi?

## LİMİT - 4

### SÜREKLİLİK

#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2}}$   
sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

- 2)  $f(x) = \sqrt{9 - |4x - 12|}$   
fonksiyonunu sürekli yapan x değerleri nedir?

- 3)  $v(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-1}}$   
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

- 4)  $g(x) = \log_{x-2}(\ln x)$   
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

- 5)  $f(x) = 2^{\frac{x^2}{x^3-5}}$   
sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

- 6)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; x < 3 \\ ax + b & ; x = 3 \\ bx + 2 & ; x > 3 \end{cases}$   
sürekli bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

- 7)  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2-7} & ; x < 3 \\ \frac{ax}{x+2} & ; x = 3 \\ bx - 2 & ; x > 3 \end{cases}$   
fonksiyonu tam olarak 2 noktada süreksiz bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

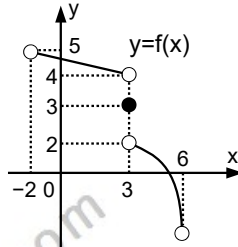
- 8)  $g(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$   
fonksiyonunu  $[0, 2\pi)$  aralığında süreksiz yapan x değerleri kaç tanedir?

## LİMİT - 4

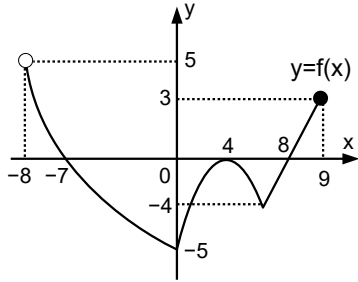
### SÜREKLİLİK

- 9)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x - m}$  fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli ise m nasıl seçilmelidir?

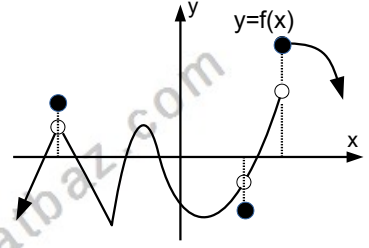
- 10) Grafiğe göre  $f(x)$  fonksiyonu  $(-2, 6)$  aralığında sürekli olduğu x tam sayı değerleri toplamı kaçtır?



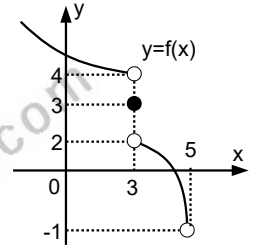
- 11) Grafiğe göre  $g(x) = \frac{1}{1+f(x)}$  fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.?



- 12) Grafiğe göre  $y=f(x)$  fonksiyonu reel sayılarda kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



- 13) Şekilde  $y=f(x)$  fonksiyonun grafiği veriliyor  $f(x)+g(x)$  sürekli. Buna göre  $g(x)$  fonksiyonu nasıl bir grafiğe sahip olabilir, çiziniz?



Limit konusuna katkıları için araştırınız  
Salih Zeki