

LİMİT - 3

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

LİMİT HESABINDA BELİRSİZLİK DURUMLARI

$y=f(x)$ fonksiyonu için bazen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

değeri bulunurken x yerine a yazdığımızda

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0$ durumları ile

karşılaşabiliriz. Sonuç olarak $f(x)$ fonksiyonunda $x \rightarrow a$ veya $x \rightarrow \infty$ için hesaplanan limit yukarıdaki ifadelerden biri oluyorsa, bir belirsizlik durumu vardır denir. Belirsizlik giderilerek limit var ise bulunabilir.

Limit hesaplandığında ortaya çıkan sayıların gerçek 0 ve gerçek 1 olmayabileceğine dikkat ediniz.

$\frac{0}{0}$ BİÇİMİNDEKİ BELİRSİZLİKLER

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ belirsizliği giderilirken

a) kesrin pay ve paydasında $(x-a)$ çarpanı sadeleştirilebilir

b) pay ve payda 1 ile genişletilebilir (!!)

c) değişken değiştirilebilir

Son durumda ifadeler düzenlenir, sadeleştirme yapılır ve limit alınır.

Örnek...1 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = ? \quad \frac{0}{0} \quad \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$$

Örnek...2 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} = ? \quad \frac{1 - 3 + 3 - 1}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{0}$$
$$\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = (x-1) \rightarrow 1-1 = 0$$

Örnek...3 :

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)^2}{x^2 - 36} = ? \quad \frac{0}{0} \quad \frac{(x-6)^2}{(x-6)(x+6)} = \frac{(x-6)}{x+6}$$
$$= \frac{0}{12} = 0$$

Örnek...4 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^3 - 27} = ? \quad \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3^3 - 27} = \frac{0}{0}$$
$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x^2 + 3x + 9)}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{3})(3^2 + 3 \cdot 3 + 9)} = \frac{1}{54\sqrt{3}}$$

Örnek...5 :

$$\lim_{h \rightarrow y} \frac{y^2 - h^2}{h^6 - y^6} = ? \quad \frac{y^2 - y^2}{y^6 - y^6} = \frac{0}{0}$$
$$\frac{y^2 - h^2}{(h^2 - y^2)(h^4 + h^2y^2 + y^4)} = \frac{-1}{h^4 + h^2y^2 + y^4} = \frac{-1}{3y^4}$$

Örnek...6 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{3\sqrt{x} - 1} = ?$$

$$x \rightarrow 1 \rightarrow t \rightarrow 1$$

Yol gösterme: $x=t^6$ değişken değiştirmesi yapabilirsiniz.

$$\frac{\sqrt{t^6} - 1}{3\sqrt{t^6} - 1} = \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)(t+1)}$$
$$= \frac{t^2 + t + 1}{t+1} = \frac{3}{2}$$

LİMİT - 3

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

UYARI

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oluyorsa

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ olmalıdır. Buradaki bölümün

limit değeri belirsizlik kaldırıldıktan sonra bulunmuştur.

Örnek...7 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 2}{x - 1} = k \in \mathbb{R} \text{ ise } a + k = ?$$

$$\begin{aligned} & \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = (x-2) = -1 = k \\ & \text{Handwritten: } \frac{1+a+2}{0} \in \mathbb{R} \rightarrow 3+a=0 \Rightarrow a=-3 \\ & \text{Handwritten: } a+k = -3+(-1) = -4 \end{aligned}$$

Örnek...8 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = n \in \mathbb{R} \text{ ise } (m, n) \text{ ikilisini bulunuz.}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+m+n}{0} = n \in \mathbb{R} \rightarrow m+n = -1 \\ & \frac{(x^2 + mx + n)}{x-1} = \frac{(x-1)(x-n)}{x-1} = x-n \quad (x=1) \\ & 1-n = n \rightarrow n = \frac{1}{2} \quad m = -\frac{3}{2} \\ & (m, n) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Örnek...9 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 + mx + 3} = \frac{1}{2} \text{ ise } m = ?$$

$$\begin{aligned} & \frac{0}{9+3m+3} = \frac{1}{2} \rightarrow 3m+12=0 \\ & m = -4 \end{aligned}$$

LİMİT - 3

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

DEĞERLENDİRME - 1

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4} = ?$

$$\frac{2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$
$$\frac{(x-2)(2x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{8}{7}} \frac{49x^2 - 64}{6x^5 - 3x^3 - 8x + 9} = ?$

$$\frac{49 \cdot \frac{64}{49} - 64}{\text{sayı}} = \frac{0}{\text{sayı}} = 0$$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 8x + 15} = ?$

$$\frac{27 - 27}{9 - 24 + 15} = \frac{0}{0}$$
$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-5)(x-3)} = \frac{9+9+9}{-2} = -\frac{27}{2}$$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + 3x + 2}{x + 2} = k \in \mathbb{R}$ ise $a + k = ?$

$$\frac{4a - 6 + 2}{0} = k \in \mathbb{R}$$

$$4a - 4 = 0 \quad a = 1$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+2} = -2 + 1 = -1$$

$$a + k = 1 + (-1) = 0$$

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 + mx + 1} = r \neq 0$ ise $m = ?$

$$\frac{0}{25 + 5m + 1} = r \neq 0 \rightarrow 5m = -26$$

$$m = -\frac{26}{5}$$

(önce belirsizlik, sonra limit) $\frac{5}{5}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x^3 - 1} = ?$

$$\frac{-(x^2 - 1)}{x^3 - 1}$$
$$\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-2}{1+1+1} = -\frac{2}{3}$$