

LİMİT - 2

PARÇALI VE MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYON

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ :

I. PARÇALI FONKSİYONUN LİMİTİ :

Limit alınacak nokta kritik nokta değilse önce dal seçilir, sonra normal limit işlemi uygulanır. Limit alınacak nokta kritik nokta ve istenen yön belirtilmemişse bu noktada sağ ve sol limit değerine bakılarak karar verilir.

Örnek...1 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; x \leq 5 \\ x^2-26 & ; x > 5 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$ $2 \cdot 2 - 1 = 3 - 1 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = ?$ $9^2 - 26 = 81 - 26 = 55$
- $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ?$ $2 \cdot 5 - 1 = 9$
- $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ?$ $5^2 - 26 = -1$

değerlerini hesaplayınız.

Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & ; x < 2 \\ 2x+1 & ; x > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ? \quad x=2 \text{ kritiktir}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 5 \end{aligned} \quad \leftarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - \ln x, & x \geq 1 \\ x^2 + a, & x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun tüm reel sayılar için limiti varsa a kaçtır?

$x=1$ için limiti olsun

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ e^1 - \ln 1 &= 1^2 + a \rightarrow 0 = e - 1 \end{aligned}$$

II. MUTLAK DEĞER FONKSİYONUN LİMİTİ:

Mutlak değer içeren fonksiyonun limiti alınmadan önce fonksiyonun aranan x değeri civarında kuralının ne olacağı bulunmalıdır. Limit alınacak nokta kritik nokta ise bu noktada sağ ve sol limit değerine bakılarak karar verilir

Örnek...4 :

$f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonu için,

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$ $|9 - 4| = 5$
- $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = ?$ $|36 - 4| = 32$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} -(x^2 - 4) = -(4 - 4) = 0$

Örnek...5 :

$f(x) = x \cdot |x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında limit var mıdır?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot |x| &= x \cdot (x) = x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot |x| &= x \cdot (-x) = -x^2 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Örnek...6 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} &= ? \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \text{yoktur}$

LİMİT - 2

PARÇALI VE MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYON

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x) = \begin{cases} \ln x & 0 < x < 1 \\ e^x & x \geq 1 \end{cases}$
şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^x = e \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = \ln 1 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ yok} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ yok} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

- 2) $f(x) = \begin{cases} mx+n, & x < 0 \\ ax^2+bx+3n-2, & x > 0 \end{cases}$
şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için her reel sayı için limite sahipse n kaçtır?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$3n-2 = n \rightarrow 2n = 2 \rightarrow n = 1$$

- 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < 0 \\ x^2-4kx+m-k, & 0 \leq x < 3 \\ mx+2, & x \geq 3 \end{cases}$
şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için her reel sayı için limite sahipse (m,k) kaçtır?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = m-k = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad m=k$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3m+2 = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9-12k+m-k$$

$$3m+2 = 9-12m+m-k \rightarrow 3m+2 = 9-11m-k$$

$$15m = 7 \quad m = 7/15$$

$$(m, k) = \left(\frac{7}{15}, \frac{7}{15} \right)$$

- 4) $f(x) = \begin{cases} x^3-x, & x < 1 \\ x^2+3x-4, & 1 \leq x \leq 2 \\ x+7, & x \geq 2 \end{cases}$ şeklinde

tanımlanan f fonksiyonu kaç reel sayı değerinde limite sahip değildir?

$$\begin{aligned} 1^+ & 1+3-4=0 \\ 1^- & 1-1=0 \quad (x=1 \text{ de yok}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^- & 4+6-4=6 \\ 2^+ & 2+7=9 \quad (x=2 \text{ de yok}) \end{aligned}$$

1 değer (x=2 için limit yok!)

- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} 5^{|x-2|} = ?$

$$5^{10-2} = 5^2 = 25$$

- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x+3} \right| = ?$

$$\left| \frac{2}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

- 7) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2-4|}{x+2} = ?$

$$\begin{aligned} \frac{|x^2-4|}{x+2} &= \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -(x-2) \\ &= 0/4 \end{aligned}$$

- 8) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left| \frac{x^2-4}{x+2} \right| = ?$

(Y.G: Önce fonksiyonu tanımlayıp sonra limiti alınız)

$$\begin{aligned} \frac{|x^2-4|}{-(x+2)} &= \frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)} = -(x-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$