

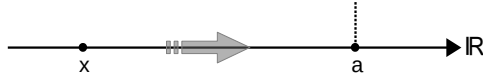
## LİMİT – 1

### KAVRAM VE ÖZELLİKLER

#### BAĞIMSIZ DEĞİŞKENİN BİR SAYIYA YAKLAŞMASI VE BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

##### SOLDAN YAKLAŞMA

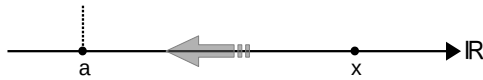
$a \in \mathbb{R}$  olsun.  $a$  sayısına,  $a$  sayısından daha küçük değerler ile yaklaşıyorsak bunu  $x \rightarrow a^-$  ile belirtiriz.



Örneğin;  $x \rightarrow 5^-$  yazdığımızda sırasıyla  $x$  değerlerini 4.5 , 4.9 , 4.99 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada  $x$  sayısı 5 e çok yakın fakat 5 den küçük bir sayıdır.

##### SAĞDAN YAKLAŞMA

$a$  sayısına,  $a$  sayısından daha büyük değerler ile yaklaşıyorsak bunu  $x \rightarrow a^+$  ile belirtiriz.



Örneğin şekilde  $x \rightarrow 5^+$  yazmışsak sırasıyla  $x$  değerlerini 5.5 , 5.1 , 5.01 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada değerler  $x$  sayısına ne kadar yakın seçilirse  $x \rightarrow 5^+$  o kadar iyi temsil edilmiş sayılır.

#### Örnek...1 :

Aşağıdaki ifadeleri sembolik olarak yazınız.

|                                  |                     |
|----------------------------------|---------------------|
| $x$ in 3 e soldan yaklaşması     | $3^-$               |
| $x$ in -7 ye sağdan yaklaşması   | $-7^+$              |
| $a$ nın $b$ ye sağdan yaklaşması | $a \rightarrow b^+$ |

#### Örnek...2 :

$x \rightarrow -3^+$  olduğuna göre,  $x^2+7$  hangi tam sayıya en yakındır?

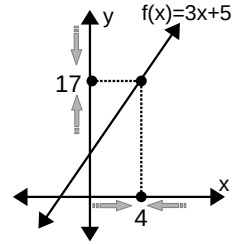
$$\begin{aligned} x &\approx -2.9 & x^2 &\approx 9 \\ & & x^2 + 7 &= 16 \\ & & & \underline{16} \end{aligned}$$

#### Örnek...3 :

Bir noktada sağdan ve soldan yaklaşımı bir örnekte inceleyelim.  $f(x)=3x+5$  fonksiyonu için  $x$  değişkeninin 4 sayısına yaklaşıırken aldığı değerler tabloda verilmiştir.

| $f(x)=3x+5$       |      |       |    |                  |      |      |
|-------------------|------|-------|----|------------------|------|------|
| $4^- \rightarrow$ |      |       | 4  | $\leftarrow 4^+$ |      |      |
| 3,8               | 3,9  | 3,99  |    | 4,01             | 4,1  | 4,2  |
| 16,4              | 16,7 | 16,97 | 17 | 17,03            | 17,3 | 17,6 |

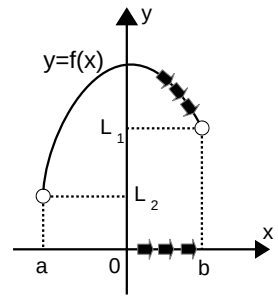
Bu tabloda  $x$  değişkeni 4 e yaklaşıırken,  $y=f(x)$  değeri 17 sayısına yaklaşımaktadır.



##### SOLDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

$f$ ,  $(a,b)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f(x)$  fonksiyonu,  $x$  değişkeni  $b$  ye bu aralıktan yaklaşıırken  $L_1$  görüntü değerine (ordinat değerine) yaklaşıyorsa  $f$  fonksiyonun  $b$  noktasında soldan limiti  $L_1$  dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L_1 \text{ ile belirtilir.}$$

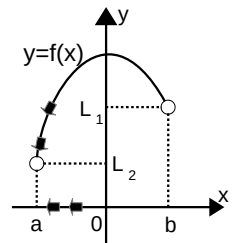


##### SAĞDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

$f$ ,  $(a,b)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f(x)$  fonksiyonu,  $x$  değişkeni  $a$  sayısına bu aralıktan sayı değerleri olarak yaklaşıırken görüntü olarak  $L_2$  değerine

yaklaşıyorsa,  $f$  fonksiyonun  $a$  noktasında ki sağdan limiti  $L_2$  dir denir.

$a$  noktasındaki sağdan limit sembolik olarak  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$  ile belirtilir.



## LİMİT – 1

### KAVRAM VE ÖZELLİKLER

#### UYARI:

Soldan ve sağdan limit tanımların da limit bulunurken fonksiyonun bu noktada tanımlı olması **gerekmez**.

#### SONUÇ

Bir fonksiyonun bir c noktasında sağdan limiti  $L_1$ , soldan limiti  $L_2$  ve

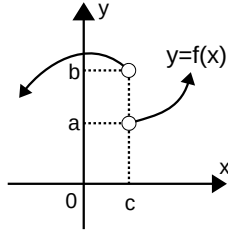
$$L_1 = L_2 = L$$

ise fonksiyonun c noktasında limiti vardır ve L dir denir. Sembolik olarak bunu  **$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$**  ile ifade ederiz.

#### Örnek...4 :

$x=c$  noktasında soldan limit b ve sağdan limit a olduğundan limit yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

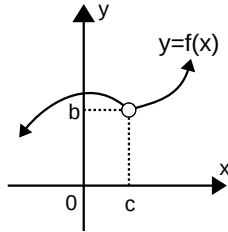


#### Örnek...5 :

$x=c$  noktasında sol limit b ve sağ limit de b olduğundan  $x=c$  için limit b dir.

Burada  $x=c$  için fonksiyonun tanımsız olması limitin var olmasına engel değildir.

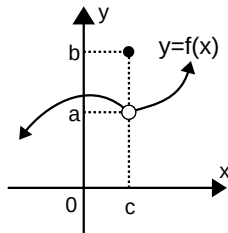
$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = b$  dolayısıyla  **$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$**  olur.



#### Örnek...6 :

$x=c$  noktasında sol limit a ve sağ limit a olduğundan  $x=c$  için limit a dır.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$$



#### UYARI

$x=c$  için fonksiyon görüntüsünün ,limitle eşit olmaması bu noktada fonksiyonun limiti olmasına **engel değildir**.

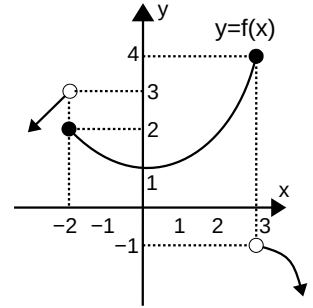
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$$

Limit değerini ve aynı noktadaki görüntü değeri arası ilişki fonksiyonların sürekliliği başlığında incelenecektir.

#### Örnek...7 :

Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= -1 \end{aligned}$$



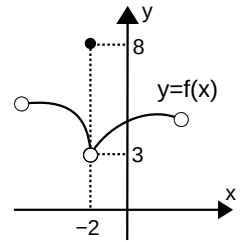
#### Örnek...8 :

Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$$

$$f(-2) = ?$$

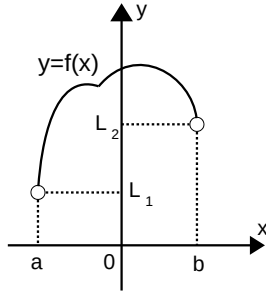


## LİMİT - 1

### KAVRAM VE ÖZELLİKLER

#### UYARI

Bir  $f(x)$  fonksiyonu  $(a,b)$  aralığında tanımlanmış olsun.  $f(x)$  fonksiyonunun  $x=a$  noktasındaki sağ limiti fonksiyonun o noktadaki limitidir.  $x=a$  noktasının sol tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan sol limite bakmaya gerek yoktur.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$



Ayrıca  $x=b$  noktasındaki sol limit fonksiyonun o noktadaki limitidir.  $x=b$ 'nin sağ tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan o noktada sağ limite bakılmaz.  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_2$

#### Örnek...9 :

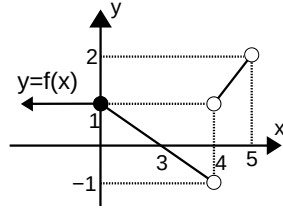
Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$$



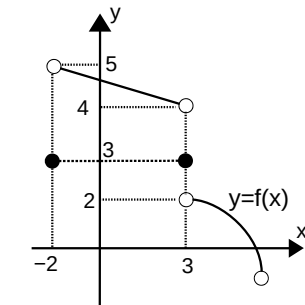
#### Örnek...10 :

Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{yok}$$

#### LİMİT ALMA KURALLARI :

#### TEOREM 1

$f$  polinom fonksiyon veya  $x=a$  noktası  $f$  fonksiyonun kritik noktası **değilse** (rasyonel fonksiyonlar için paydanın köklerinden biri, parçalı fonksiyonlar için sınır noktaları, mutlak değer veya logaritma fonksiyonunun içini 0 yapan değerler)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ olur.}$$

#### Örnek...11 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = ? \quad 2^3 = 8$$

#### Örnek...12 :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 + x + \ln(x-3) = ? \quad 16 + 4 + \ln 1 = 20$$

#### TEOREM 2

$L, M, c$  ve  $k$  birer reel sayı ve  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  olsun.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = L \mp M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(L)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} c^{f(x)} = c^L$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} \log f(x) = \log\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = \log(L), \log L \in \mathbb{R}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ ve } f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

ise  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$  olur.

## LİMİT - 1

### KAVRAM VE ÖZELLİKLER

#### Örnek...13 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} 5x^2 = ? \quad 5 \cdot 1^2 = 5$$

#### Örnek...14 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 - 7x^2 + 12x + 21) = ? \quad 3 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 21 = 21$$

#### Örnek...15 :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (4x^2 - 5x + 13) = ? \quad 4 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 13 = 36 - 15 + 13 = 34$$

#### Örnek...16 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (5x^2 + x^2 - 4x + 3) = ? \quad 5 \cdot 2^2 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 20 + 4 - 8 + 3 = 24$$

#### Örnek...17 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 3} = ? \quad \frac{2^4 + 2^2 + 1}{2 - 3} = \frac{16 + 4 + 1}{-1} = -21$$

#### Örnek...18 :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)\sqrt{5}}{|x-x^2+2|} = ? \quad \frac{2\sqrt{5}}{(4-16+2)} = \frac{2\sqrt{5}}{-10} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

#### Örnek...19 :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{x+22}}}{\sqrt{2x+17}} = ? \quad \frac{\sqrt{16 - \sqrt{4+22}}}{\sqrt{2 \cdot 4 + 17}} = \frac{\sqrt{16 - 2\sqrt{22}}}{5} = \frac{6}{5}$$

#### Örnek...20 :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( f(x) \cdot g^2(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = ?$$

$$5 \cdot 2^2 - \frac{5}{2} = 20 - \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$$

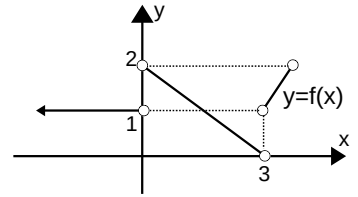
#### Örnek...21 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x^5 + 4x^4 + 2x^3 - x^2}{x^7} \right) = ? \quad \frac{1+4+2-1}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

#### Örnek...22 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(5-x) = ?$$

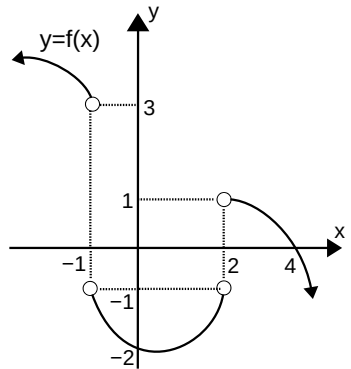
$$f(3^-) = 0$$



#### Örnek...23 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = ?$$

$$f(f(2^-)) = f(-1^-) = \underline{\underline{3}}$$



## LİMİT - 1

### KAVRAM VE ÖZELLİKLER

#### TRİGONOMETRİK LİMİTLER

$y = \sin x$  ve  $y = \cos x$  fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlıdır dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$y = \tan x$  ve  $y = \cot x$  fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlı değildir. Tanımlı olduğu her nokta için

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

Tanımlı olmadığı noktalarda gerekirse sağ ve sol limitlere bakılmalıdır.

#### Örnek...24 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = ? \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

#### Örnek...25 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = ?$$
$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

#### Örnek...26 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \tan^3 x}{\sec^2 x} = ?$$
$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

#### Örnek...27 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = ?$$
$$\cot 120 = -\cot 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 120 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

#### Örnek...28 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} \frac{|\csc x|}{\tan x} = ?$$
$$\left| \frac{1}{\sin 225} \right| = \frac{\sqrt{2}}{1}$$
$$\tan 225 = \tan(180+45) = \tan 45$$

#### Örnek...29 :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{|\cos x|} = ?$$
$$\frac{\cos x}{-\cos x} = -1$$


Limit konuduna katkıları için araştırınız  
Cauchy

## LİMİT - 1

### KAVRAM VE ÖZELLİKLER

#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $x \rightarrow -3^+$  olduğuna göre,  $x^2 + 40x + 1$  ifadesinin değerinden küçük en büyük tam sayı kaçtır?

$$x \sim -2,99 \text{ alınırsa}$$
$$8,94 - 119,6 + 1 \sim -109,6$$
$$\underline{\underline{-110}}$$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow a^2} \left( \frac{13}{1+x} \right) = \frac{1}{2}$  ise  $a > 0$  sayısı kaçtır?
- $$\frac{13}{1+a^2} = \frac{1}{2} \quad a^2 = 25$$
- $$a = \pm 5$$
- $$a = 5$$

- 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + ax + 5) = 0$  ise  $a$  sayısı kaçtır?

$$2 + a + 5 = 0 \quad a = -7$$

- 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(3^x + 4^x)}{5^x} \right) = ?$
- $$\frac{3^2 + 4^2}{5^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}}$$
- $$= 4$$

- 5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \log(x-3) = ?$   $\log(-1) \notin \mathbb{R}$

- 6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \ln(x-3) = ?$

$$\ln(1) = 0$$

- 7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-2) = ?$

$$\ln(-1) \notin \mathbb{R}$$

- 8)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  ve  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x) - 3f(x) + 2) = 0$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  kaç olabilir?

$$L^2 - 3L + 2 = 0$$
$$(L-2)(L-1) = 0$$
$$L = 2$$
$$L = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 2 + 2 = 4 //$$
$$1 + 1 = 2 //$$

- 9)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^{70} - 2x^{69} + 3x^2 + 4) = ?$

$$2^{70} - 2 \cdot 2^{69} + 3 \cdot 2^2 + 4$$
$$2^{70} - 2^{70} + 12 + 4$$
$$= 16$$

- 10)  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x-5}{x^2+25} \right) = ?$   $\frac{0}{50} = 0$

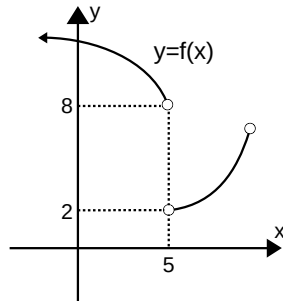
## LİMİT - 1

### KAVRAM VE ÖZELLİKLER

11)

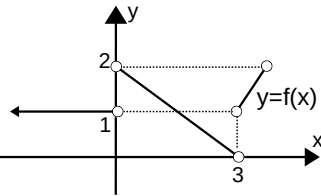
a)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ?$  8

b)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ?$  2



12)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = ?$

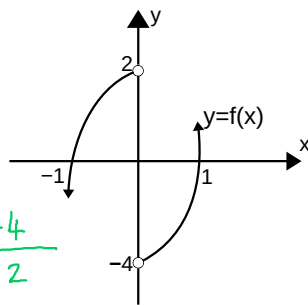
$f(0^+) = 2$



13)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^2)}{f(x^3)} = ?$

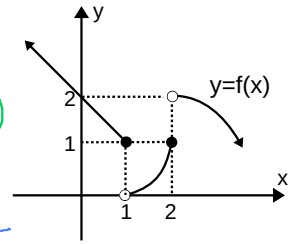
$\frac{f(0^+)}{f(0^-)} = \frac{-4}{2} = -2$



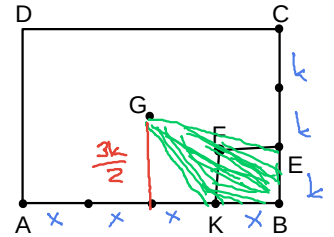
14)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f \circ f)(x) = ?$

$f(f(f(1^+)))$



15) ABCD bir dikdörtgen ve G noktası bu dikdörtgenin ağırlık merkezi olsun. F noktası ABCD nin iç bölgesinde bir noktadır.



$|BE| = \frac{|BC|}{3}$   $|BK| = \frac{|BA|}{4}$  ise

$\lim_{F \rightarrow G} \left( \frac{A(ABCD)}{A(BEFK)} \right) = ?$

$A(ABCD) = 4 \times 3k = 12kx$

$A(BEFK) = \left(\frac{k+3k}{2}\right) \cdot 2x - \frac{3k}{2} \cdot x = \frac{5kx}{2} - \frac{3kx}{4} = \frac{7kx}{4}$

$\lim = \frac{12kx}{\frac{7kx}{4}} = \frac{48}{7}$