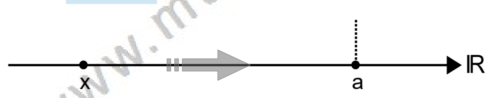
BAĞIMSIZ DEĞİŞKENİN BİR SAYIYA YAKLAŞMASI VE BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

SOLDAN YAKLAŞMA

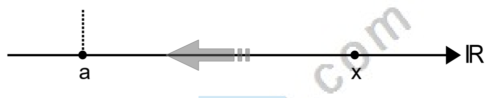
$a \in \mathbb{R}$ olsun. a sayısına, a sayısından daha küçük değerler ile yaklaşıyorsak bunu $x \to a^-$ ile belirtiriz.



Örneğin; $x \to 5^-$ yazdığımızda sırasıyla x değerlerini 4.5 , 4.9 , 4.99 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada x sayısı 5 e çok yakın fakat 5 den küçük bir sayıdır.

SAĞDAN YAKLAŞMA

a sayısına, a sayısından daha büyük değerler ile yaklaşıyorsak bunu $x \to a^+$ ile belirtiriz.



Örneğin şekilde $x \to 5^+$ yazmışsak sırasıyla x değerlerini 5.5 , 5.1 ,5.01 gibi değerler aldığını düşünürüz.
Burada değerler x sayısına ne kadar yakın seçilirse $x \to 5^+$ o kadar iyi temsil edilmiş sayılır.

Örnek...1 :

Aşağıdaki ifadeleri sembolik olarak yazınız.

x in 3 e soldan yaklaşması	
x in −7 ye sağdan yaklaşması	
a nın b ye sağdan yaklaşması	

Örnek...2 :

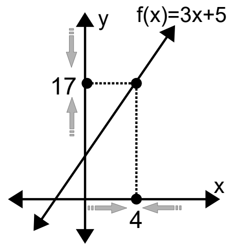
$x \to -3^+$ olduğuna göre, x^2+7 hangi tam sayıya en yakındır?

Örnek...3 :

Bir noktada sağdan ve soldan yaklaşımı bir örnekte inceleyelim. f(x)=3x+5 fonksiyonu için x değişkeninin 4 sayısına yaklaşırken aldığı değerler tabloda verilmiştir.

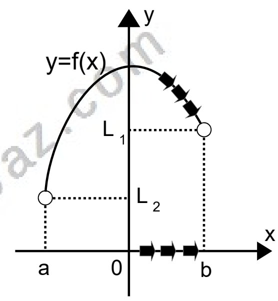
f(x)=3x+5						
$4^- \to$			4	$\leftarrow 4^+$		
3,8	3,9	3,99		4,01	4,1	4,2
16,4	16,7	16,97	17	17,03	17,3	17,6

Bu tabloda x değişkeni 4 e yaklaşırken, y=f(x) değeri 17 sayısına yaklaşmaktadır.



SOLDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

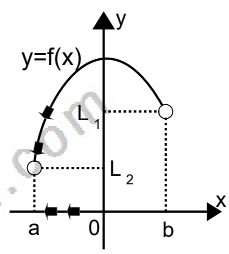
f, (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f(x) fonksiyonu, x değişkeni b ye bu aralıktan yaklaşırken L_1 görüntü değerine (ordinat değerine) yaklaşıyorsa f fonksiyonun b noktasında soldan limiti L_1 dir denir ve



$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L_1$ ile belirtilir.

SAĞDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

f, (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f(x) fonksiyonu, x değişkeni a sayısına bu aralıktan sayı değerleri alarak yaklaşırken görüntü olarak L_2 değerine yaklaşıyorsa, f fonksiyonun a noktasında ki sağdan limiti L_2 dir denir.



a noktasındaki sağdan limit sembolik olarak $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ ile belirtilir.

UYARI:

Soldan ve sağdan limit tanımların da limit bulunurken fonksiyonun bu noktada tanımlı olması **gerekmez**.

SONUÇ

Bir fonksiyonun bir c noktasında sağdan limiti L_1, soldan limiti L_2 ve

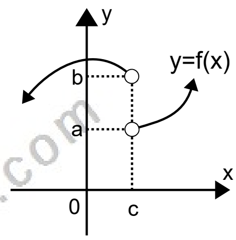
$$L_1 = L_2 = L$$

ise fonksiyonun c noktasında limiti vardır ve L dir denir. Sembolik olarak bunu $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ile ifade ederiz.

Örnek...4 :

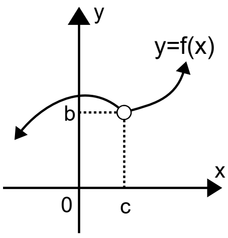
x=c noktasında soldan limit b ve sağdan limit a olduğundan limit yoktur.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$



Örnek...5 :

x=c noktasında sol limit b ve sağ limit de b olduğundan x=c için limit b dir.
Burada x=c için fonksiyonun tanımsız olması limitin var olmasına engel değildir.

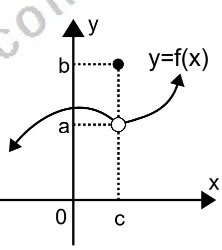


$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = b$ dolayısıyla $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b$ olur.

Örnek...6 :

x=c noktasında sol limit a ve sağ limit a olduğundan x=c için limit a dır.

$$\lim_{x \to c} f(x) = a$$



UYARI

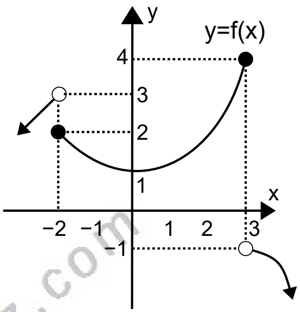
x=c için fonksiyon görüntüsünün ,limitle eşit olmaması bu noktada fonksiyonun limiti olmasına engel değildir.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c} f(x) = a$$

Limit değerini ve aynı noktadaki görüntü değeri arası ilişki fonksiyonların sürekliliği başlığında incelenecektir.

Örnek...7 :

Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz.



$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$

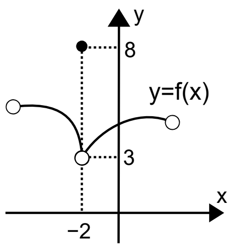
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

Örnek...8 :

Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz?



$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$

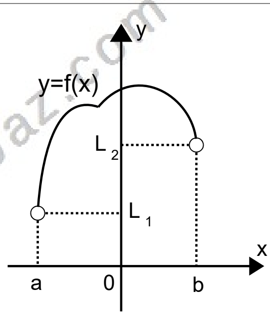
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$

$f(-2) = ?$

UYARI

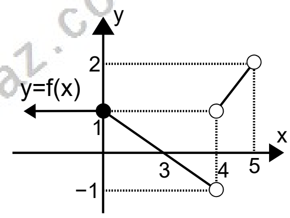
Bir f(x) fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlanmış olsun. f(x) fonksiyonunun x=a noktasındaki sağ limiti fonksiyonun o noktadaki limitidir. x=a noktasının sol tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan sol limite bakmaya gerek yoktur. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$



Ayrıca x= b noktasındaki sol limit fonksiyonun o noktadaki limitidir. x=b' nin sağ tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan o noktada sağ limite bakılmaz. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b} f(x)=L_2$

Örnek...9 :

Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.



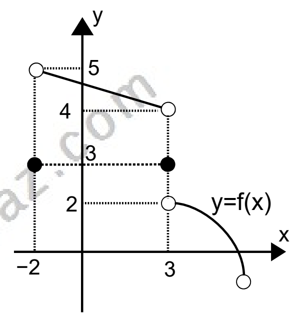
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=$

Örnek...10 :

Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.



$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=$

LİMİT ALMA KURALLARI :

TEOREM 1

f polinom fonksiyon veya x=a noktası f fonksiyonun kritik noktası **değilse** (rasyonel fonksiyonlar için paydanın köklerinden biri, parçalı fonksiyonlar için sınır noktaları , mutlak değer veya logaritma fonksiyonunun içini 0 yapan değerler)

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ olur.

Örnek...11 :

$\lim\limits_{x\to 2} x^3=?$

Örnek...12 :

$\lim\limits_{x\to 4^-} x^2+x+\ln(x-3)=?$

TEOREM 2

L, M ,c ve k birer reel sayı ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ olsun.

1) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\mp g(x))=L\mp M$

2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x))=L.M$

3) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{L}{M}$ $\quad (M \neq 0)$

4) $\lim\limits_{x\to a} k.f(x)=k.\lim\limits_{x\to a} f(x)=k.L$

5) $\lim\limits_{x\to a} (gof)(x)=g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)=g(L)$

a) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[r]{f(x)}=\sqrt[r]{L}, \sqrt[r]{L}\in\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to a} c^{f(x)}=c^L$

c) $\lim\limits_{x\to a} \log f(x)=\log(\lim\limits_{x\to a} f(x))=\log(L), \log L\in\mathbb{R}$

6) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ ve $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$

ise $\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$ olur.

Örnek...13 :

$\lim\limits_{x\to 1} 5x^2 = ?$

Örnek...14 :

$\lim\limits_{x\to 0} (3x^3-7x^2+12x+21) = ?$

Örnek...15 :

$\lim\limits_{x\to 3^+} (4x^2-5x+13) = ?$

Örnek...16 :

$\lim\limits_{x\to 2^-} (5^x+x^2-4x+3) = ?$

Örnek...17 :

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4+x^2+1}{x-3} = ?$

Örnek...18 :

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-2)\sqrt{5}}{|x-x^2+2|} = ?$

Örnek...19 :

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2-\sqrt{x}+22}}{\sqrt{2x+17}} = ?$

Örnek...20 :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=5,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=2$ ise

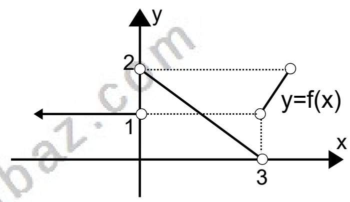
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x).g^2(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = ?$

Örnek...21 :

$\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x^5+4x^4+2x^3-x^2}{x^7} \right) = ?$

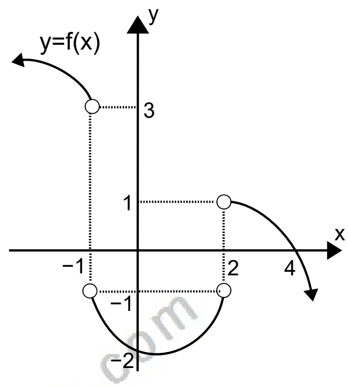
Örnek...22 :

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(5-x) = ?$



Örnek...23 :

$\lim\limits_{x\to 2^-} (fof)(x) = ?$



TRİGONOMETRİK LİMİTLER

y=sinx ve y= cosx fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlıdır dolayısıyla

$\lim\limits_{x\to a} \sin x=\sin a$, $\lim\limits_{x\to a} \cos x=\cos a$

y=tanx ve y=tanx fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlı değildir.Tanımlı olduğu her nokta için

$\lim\limits_{x\to a} \tan x=\tan a$, $\lim\limits_{x\to a} \cot x=\cot a$

Tanımlı olmadığı noktalarda gerekirse sağ ve sol limitlere bakılmalıdır.

Örnek...24 :

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x=?$

Örnek...25 :

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=?$

Örnek...26 :

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x-\tan^3 x}{\sec^2 x}=?$

Örnek...27 :

$\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}} \frac{\cot^2 x-\sin^2 x}{\cos x}=?$

Örnek...28 :

$\lim\limits_{x\to {\frac{5\pi}{4}}^+} \frac{|\operatorname{cosec} x|}{\tan x}=?$

Örnek...29 :

$\lim\limits_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{|\cos x|}=?$

Limit konuduna katkıları için araştırınız
Cauchy

DEĞERLENDİRME

1) $x \to -3^{+}$ olduğuna göre, $x^2+40x+1$ ifadesinin değerinden küçük en büyük tam sayı kaçtır?

2) $\lim\limits_{x\to a^2}\left(\dfrac{13}{1+x}\right)=\dfrac{1}{2}$ ise a>0 sayısı kaçtır?

3) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+ax+5)=0$ ise a sayısı kaçtır?

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\dfrac{(3^x+4^x)}{5^x}}{2^{-x}}\right)=?$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\log(x-3)=?$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\ln(x-3)=?$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x-2)=?$

8) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L=\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ve
$\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)-3f(x)+2)=0$ ise
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ kaç olabilir?

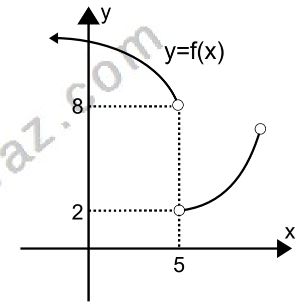
9) $\lim\limits_{x\to 2}(x^{70}-2x^{69}+3x^2+4)=?$

10) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x-5}{x^2+25}\right)=?$

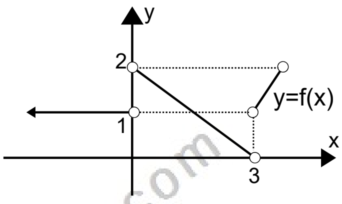
11)

a) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=?$

b) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=?$

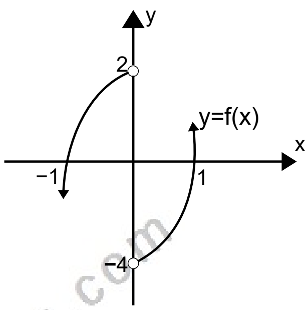


12) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2)$

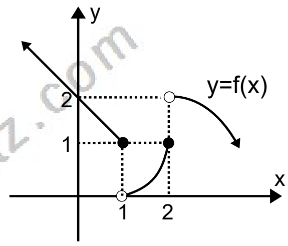


13)

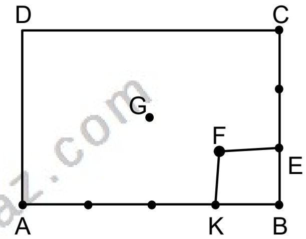
$$\frac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x^2)}{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3)}=?$$



14) $\lim\limits_{x\to 1^+} (fofof)(x)=?$



15) ABCD bir dikdörtgen ve G noktası bu dikdörtgenin ağırlık merkezi olsun. F noktası ABCD nin iç bölgesinde bir noktadır.



$|BE|=\dfrac{|BC|}{3}$ $|BK|=\dfrac{|BA|}{4}$ ise

$$\lim_{F\to G}\left(\frac{A(ABCD)}{A(BEFK)}\right)=?$$