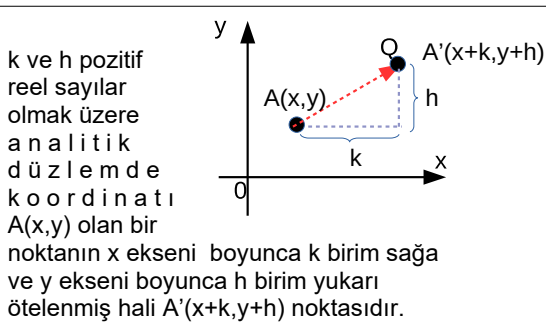


DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

ÖTELEME DÖNÜŞÜMÜ

Bir şeklin hiç değişmeden(boyutları bozulmadan) sağ,sol, yukarı ve aşağı (eksenlere paralel)yönlerde bir vektör doğrultusunda yer değiştirilmesine **öteleme** denir.



Örnek...1 :

A(3,5) noktasını eksenler boyunca 2 br sağa ve 5 br yukarı ötelenmişini bulunuz?

$$A'(3+2, 5+5) = A'(5,10)$$

Örnek...2 :

A(1,-9) noktasını eksenler boyunca 2 br sola ve 8 br yukarı ötelenmişini bulunuz?

$$A'(1-2, -9+8) = A'(-1,-1)$$

Örnek...3 :

A(x, y) noktasının eksenler boyunca 4 br sağa ve 8 br aşağı ötelenmesiyle B(1,-2) noktası elde ediliyor. Buna göre A noktasının koordinatları çarpımını bulunuz.

$$A'(x+4, y-8) = B(1,-2)$$

$$\begin{aligned} x+4 &= 1 \\ x &= -3 \\ y-8 &= -2 \\ y &= 6 \\ xy &= -18 \end{aligned}$$

Örnek...4 :

$f(x)=x^2$ parabolünü eksenler boyunca 1 birim sağa ve 1 birim aşağı kaydırılmasıyla elde edilen parabolü bulunuz

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) - 1 \\ g(x) &= (x-1)^2 - 1 \\ g(x) &= x^2 - 2x \end{aligned}$$

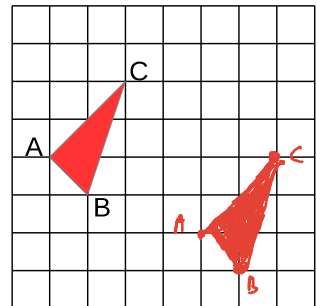
Örnek...5 :

$f(x)=x^2+6x+11$ parabolünü eksenler boyunca 2 birim sola ve 3 birim aşağı kaydırılmasıyla elde edilen parabolü bulunuz

$$\begin{aligned} y &= f(x+2) - 3 \\ y &= (x+2)^2 + 6(x+2) + 11 - 3 \\ y &= x^2 + 4x + 4 + 6x + 12 + 11 - 3 \\ y &= x^2 + 10x + 24 \end{aligned}$$

Örnek...6 :

Şekildeki ABC üçgeninin eksenler boyunca 4 birim sağa , 2 birim aşağı ötelenmişini bulunuz

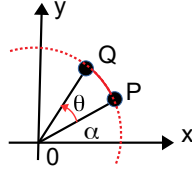


DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

Düzlemde bir $P(x,y)$ noktasının O noktası etrafında θ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen nokta ($|OP|=|OQ|$)



$Q = R_\theta(P) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ olur.

(Bağıntıda $P(x,y) = P(|OP| \cos \alpha, |OP| \sin \alpha)$ ve $Q(x', y') = Q(|OQ| \cos(\alpha + \theta), |OQ| \sin(\alpha + \theta))$ olduğuna dikkat)

Burada R_θ ya dönme dönüşümü denir.

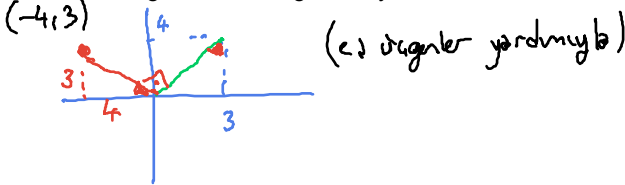
Düzlemin her P noktası için $R_\theta(P)$ dönmesi yapılabilir.

$T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu düzlemin noktalarını $P \rightarrow R_\theta(P)$ düzlemin noktalarıyla eşleyen birebir ve örten fonksiyon olduğundan düzlemin bir dönüşümü adını alır

Dönme esnasında değişmeyen noktaya dönme merkezi denir

Örnek...7 :

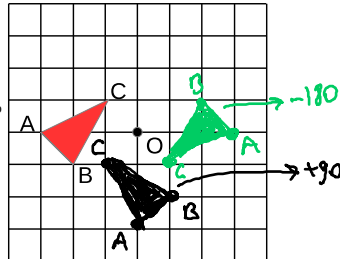
$A(3,4)$ noktasını orjin etrafında pozitif yönde 90° döndürdüğümüzde hangi noktayı elde ederiz?



Örnek...8 :

Şekildeki üçgenin O noktası etrafında

- pozitif yönde 90°
 - negatif yönde 180°
- elde edilen görüntüleri çiziniz?



Örnek...9 :

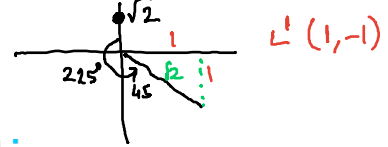
Aşağıda verilen noktaları orjin etrafında verilen açılar kadar pozitif yönde döndürülmesiyle elde edilen noktaları bulunuz.

$M(6,0)$ $\theta=30^\circ$

$M'(3\sqrt{3}, 3)$



$L(0, \sqrt{2})$ $\theta=225^\circ$



Örnek...10 :

$A(x,y)$ noktasının orjin etrafında pozitif yönde 90° döndürüldüğünde $B(6,-4)$ noktası elde ediliyor. Buna göre x,y kaçtır?

$$\begin{aligned} B(-y, x) &= (6, -4) \\ -y &= 6 \\ x &= -4 \\ y &= -6 \\ x &= -4 \\ xy &= 24 \end{aligned}$$

Örnek...11 :

Köşe koordinatları $A(-2,-4)$, $B(1,2)$ ve $C(-5,2)$ olan ABC üçgeninin 2 br sağa ve 4 br yukarı eksenler doğrultusunda ötelenmesi sonucu elde edilen üçgen orjin etrafında pozitif yönde 270° döndürülüyor. Elde edilen üçgenin ağırlık merkezini bulunuz.

$$\begin{aligned} G\left(\frac{-2+1-5}{3}, \frac{-4+2+2}{2}\right) &= G(-2, 0) \\ G'(-2+2, 0+4) &= G'(0, 4) \rightarrow G''(4, 0) \end{aligned}$$



Düzlemde öteleme dönme ve bunların bileşke dönüşümleri, uzaklık ve açıların yönlerini koruyan dönüşümlerdir.

R_θ ve R_α iki dönme fonksiyonu ise $R_\theta \circ R_\alpha = R_{\theta+\alpha}$ olur.

Örnek...12 :

$K(6,-9)$ için $[R_{230^\circ} \circ R_{-50^\circ}](K)$ noktasını bulunuz?



K_2, K_0 'ın orjine göre simetrisi olur
 $K_2(-6, 9)$

DÖNÜŞÜMLER

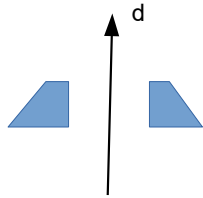
ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

Bir şekil merkezi etrafında 360° den küçük bir açı ile döndürüldüğünde kendisi ile çakışıyorsa dönme simetrisine sahiptir denir. Şekil merkezi etrafında döndürülürken kendisi ile çakışan en küçük dönme açısına en küçük dönme simetri açısı denir. (Dönme simetri sayısı 360 ın en küçük dönme simetri açısına bölünmesiyle bulunur)

Düzgün Çokgen	Eşkenar üçgen	Düzgün beşgen
En küçük dönme simetri açısı	120	72
Dönme simetri sayısı	3	5
Yansıma eksen sayısı	3	5

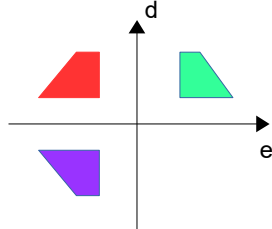
YANSIMA

Bir şeklin verilen bir noktaya veya doğruya göre simetriğinin alınmasına yansıma dönüşümü hareketi denir. Bir doğru bir şekli birbirine simetrik iki şekle ayırıyorsa bu doğruya şeklin simetri eksenidir.



Örnek...13 :

Şekilde kırmızı dörtgenin d ve e doğrularına göre yansımaları verilmiştir



Örnek...14 :

A(-5,9) noktasının x eksenine göre yansıma altındaki görüntüsünü bulunuz?

$$A'(-5, -9)$$

SİMETRİ

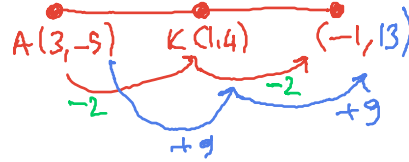
A ve B ile aynı doğrultuda , B noktasına A'nın uzaklığı kadar uzaklıkta bulunan A' noktasına , A'nın B ye göre simetriği olan nokta denir. Yani B noktası simetrik iki noktanın orta noktasıdır.

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) ve C(x_0, y_0) noktası A ile B noktasının orta noktası ise

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ olur.}$$

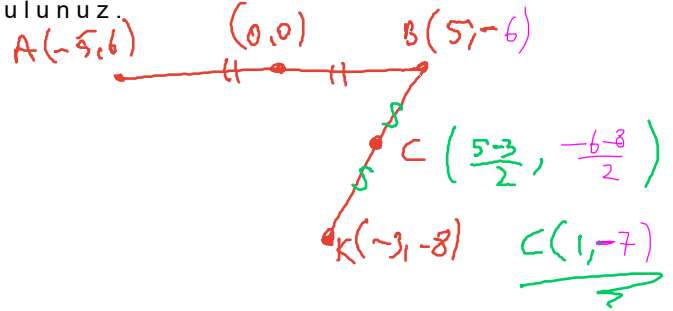
Örnek...15 :

A(3,-5) noktasının K(1,4) noktasına göre simetriği olan noktayı bulunuz.



Örnek...16 :

A(-5,6) noktasının orijine göre simetriği B, B noktasının C noktasına göre simetriği K(-3,-8) ise C noktasının koordinatlarını bulunuz.



Örnek...17 :

L(-5,6) noktasının B(-1,-2) noktasına göre simetriği K ise L ve K noktaları arası uzaklık kaç birimdir?

$$|LK| = 2 \cdot |LB|$$

$$|LB| = \sqrt{(-5+1)^2 + (6+2)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$|LK| = 2 \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

NOKTANIN DOĞRULARA GÖRE SİMETRİKLERİ

1. NOKTANIN EKSENLERE GÖRE SİMETRİKLERİ

A(a,b) noktasının x eksenine göre simetriği A' (a,-b) y eksenine göre simetriği A'' (-a,b) olur

Örnek...18 :

A(3,8) noktasının x eksenine göre simetriği B, K(-3,5) noktasının y eksenine göre simetriği G noktası ise |BG| kaç birimdir?

$$B(3,-8) \quad G(3,5)$$
$$|BG| = \sqrt{0^2 + 13^2} = 13$$

Örnek...19 :

Bir K noktasının x eksenine göre simetriği L(-6,4) ise K noktasının y eksenine göre simetriği olan noktanın koordinatları çarpımı kaçtır?

$$K(-6,-4) \quad K'(6,-4)$$
$$6 \cdot (-4) = -24$$

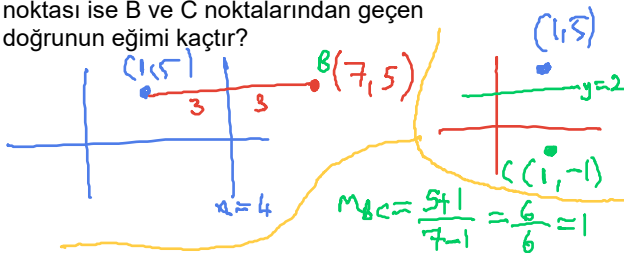
2. NOKTANIN X=A VE Y=B DOĞRULARINA GÖRE SİMETRİKLERİ

A(x₁, y₁) noktasının x=a doğrusuna göre simetriği A'(2a-x₁, y₁) noktasıdır.

A(x₁, y₁) noktasının y=b doğrusuna göre simetriği A''(x₁, 2b-y₁) noktasıdır.

Örnek...20 :

A(1,5) noktasının x=4 noktasına göre simetriği B, y=2 doğrusuna göre simetriği C noktası ise B ve C noktalarından geçen doğrunun eğimi kaçtır?



2. NOKTANIN Y=X VE Y=-X DOĞRULARINA GÖRE SİMETRİKLERİ

A(x₁, y₁) noktasının y=x doğrusuna göre simetriği A'(y₁, x₁) noktasıdır.

A(x₁, y₁) noktasının y=-x doğrusuna göre simetriği A''(-y₁, -x₁) noktasıdır.

Örnek...21 :

Dik koordinat düzleminde K(4,-2) noktasının y=x e göre simetriği olan nokta ile L(-3,2) noktasının y=-x e göre simetriği olan nokta arası mesafe kaç birimdir?

$$K'(-2,4)$$
$$L'(-2,3)$$
$$|K'L'| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

3. NOKTANIN DOĞRUYA GÖRE SİMETRİĞİ

A(x₁, y₁) noktasının ax+by+c=0 doğrusuna göre simetriği A'(p, q) noktası bulunurken

a) eğimi $\frac{b}{a}$ olan ve A(x₁, y₁) noktasından

geçen doğrunun denklemini bulunur

b) bulunan ve verilen doğruların kesim noktası bulunur

c) A(x₁, y₁) noktasının kesim noktasına göre simetriği A'(p, q) noktasıdır.

Örnek...22 :

A(1,2) noktasının y=2x+1 doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz

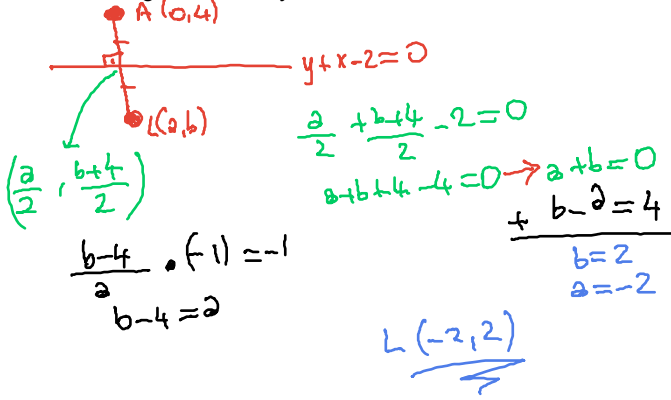
$$A(1,2) \quad A'(2,b)$$
$$y=2x+1$$
$$\frac{b-2}{2-1} \cdot 2 = -1$$
$$2b-4 = -2+1$$
$$2b-4 = -1$$
$$2b = 3$$
$$b = \frac{3}{2}$$
$$A' \left(\frac{3}{2}, \frac{12}{5} \right)$$

DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

Örnek...23 :

A(0,4) noktasının $y+x-2=0$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz



Örnek...24 :

A(6,2) noktasının $4y-3x-15=0$ doğrusuna göre simetriği B ise $|AB|$ kaç birimdir?

Handwritten solution for Example 24:

$|AB| = 2 \cdot |AM|$

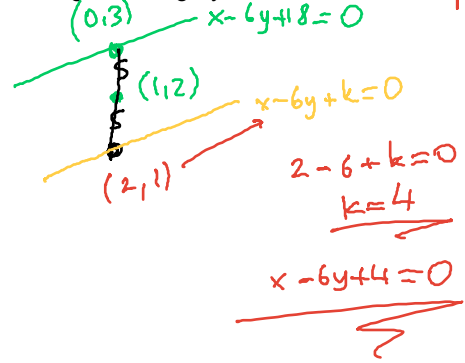
Where M is the midpoint of AB, and AM is the perpendicular distance from A to the line.

$$= 2 \cdot \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 6 - 15|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{25}{5} = 10$$

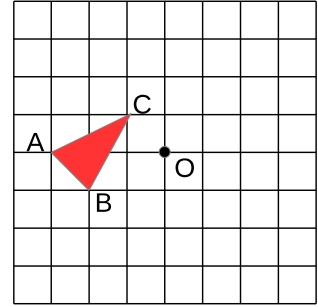
Örnek...26 :

$x-6y+18=0$ doğrusunun K(1,2) noktasına göre simetriği olan doğruyu bulunuz

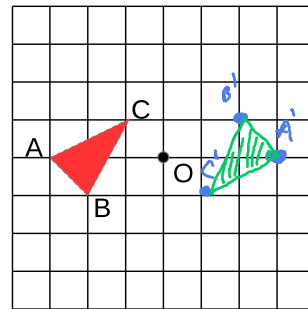


Örnek...27 :

Yanda verilen ABC üçgenin O noktasına göre simetriğini (yansımalarını) çiziniz



Çözüm

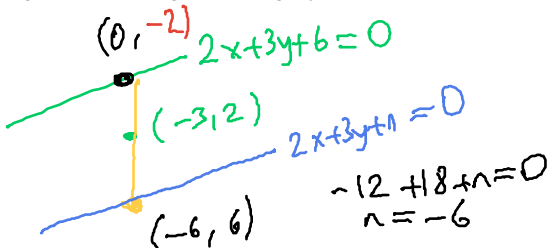


DOĞRUNUN NOKTAYA GÖRE SİMETRİĞİ

$ax+by+c=0$ doğrusunun A(p,r) doğrusuna göre simetriği $ax+by+d=0$ doğrusudur. Burada d sabitini bulmak için verilen doğrunun üzerinde bir nokta alınır ve bu noktayla orta noktası A olacak bir B noktası elde edilir. B noktası $ax+by+d=0$ doğrusu üzerindedir

Örnek...25 :

$2x+3y+6=0$ doğrusunun K(-3,2) noktasına göre simetriği olan doğruyu bulunuz



Simetri dönme ve öteleme dönüşümleri doğada ve mimaride kullanılmaktadır. Özellikle kültürümüzün sşmgelerinden biri olan halılarımızda motiflerde sıklıkla karşımıza çıkmaktadır.