

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

DİZİLER

Tanım kümesi pozitif Tam Sayılar kümesi, değer kümesi Reel Sayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir.

Dizi genel olarak $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, tanım kümesi; $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ve görüntü kümesi; $f(\mathbb{Z}^+) = \{f(1), f(2), f(3), f(n), \dots\}$ dir.

Dizilerde değişken için x yerine n seçilir ve genellikle, $f(n)$ yerine (a_n) , (b_n) , (x_n) biçiminde temsil edilirler.

Örneğin $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ dizisini $(a_n) = (n^2)$ biçiminde veya $(a_n) = (1, 4, 9, \dots, n^2, \dots)$ olarak yazılabilir.

Bu dizide bazı terimler $a_1 = 1$, $a_3 = 9$, $a_{10} = 100$

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ şeklinde yazıldığında.

a_1 dizinin birinci terimi

a_2 dizinin ikinci terimi

a_3 dizinin üçüncü terimi

a_n dizinin n inci terimi veya genel terimidir.

(kısaca $f(n) = a_n$ düşünülür)

Örnek...1 :

Genel terimi; $a_n = \frac{1}{n+1}$ olan dizi

$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$ şeklinde yazılabilir.

Örnek...2 :

$(a_n) = \left(\frac{1}{n-781}\right)$ ifadesi bir dizi belirtmez çünkü

bu ifadeyi tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi değildir.

Örnek...3 :

Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir dizinin genel terimi olabilir?

$$a_n = \frac{1}{n^2 - 200}$$

$$b_n = \tan(n^\circ)$$

$$c_n = \frac{1}{n^3 - n}$$

$$d_n = \log_2(100 - n)$$

$$e_n = \frac{\sqrt{600 - n}}{n^2 + 1}$$

$$f_n = \sqrt[3]{n - 20}$$

Örnek...4 :

Genel terimi $w_n = n^2 + 1$ olan dizinin üçüncü terimi kaçtır?

Örnek...5 :

Genel terimi $r_n = n^3 - n + 2$ olan dizi için ilk üç terim toplamı nedir?

Örnek...6 :

Genel terimi $u_n = n!$ olan dizide 10.terim 8. terimin kaç katıdır?

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

Örnek...7 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} n+2 & n < 10 \\ n-2 & n \geq 10 \end{cases}$ olan dizi için $a_9 + a_8 - a_{10}$ kaçtır?

Örnek...8 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} 2n-3 & n \text{ tekse} \\ n^2+1 & n \text{ çiftse} \end{cases}$ olan dizi için $a_9 + a_8 - a_{10}$ kaçtır?

Örnek...9 :

Genel terimi $a_n = 2+4+6+\dots+2n$ olan dizi için
a) $a_5 = ?$

b) $a_{10} - a_9 = ?$

Örnek...10 :

Genel terimi $a_n = 1.2.3 \dots n$ olan dizi için a_{25} teriminin sondan kaç basamağı 0 dir?

Örnek...11 :

Genel terimi $x_n = \frac{2n-3}{n+1}$ dizisinin kaçınıcı terimi $\frac{7}{4}$ olur?

Örnek...12 :

$(a_n) = \left(\frac{19n-n^2}{n^2+13n} \right)$ dizisinin kaç terimi pozitiftir?

Örnek...13 :

$(c_n) = \left(\frac{n^2+5n+10}{n+1} \right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

Örnek...14 :

$(p_n) = \left(\frac{n^2-3n+1}{n+1}\right)$ dizisinin kaç terimi $\left(\frac{1}{2}\right)$ den küçüktür?

Örnek...15 :

$(b_n) = (n^2-4n+13)$ dizisinin en küçük terimi nedir?

Örnek...16 :

$(b_n) = (9-n^2-7n)$ dizisinin en büyük terimi nedir?

Örnek...17 :

$(b_n) = (13-n^2)$ dizisinin en çok kaç terimi $(-20, 20)$ arasındadır?

Örnek...18 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} 2n & n \text{ tek} \\ 2n-1 & n \text{ çift} \end{cases}$ olan dizi için ilk 4 terim çarpımı kaçtır?

Örnek...19 :

Genel terimi $d_n = 2^n \cdot (n+1)!$ olan dizide ardışık iki terimden biri diğerinin 12 katıdır. Bu terimlerden küçük olanı kaçtır?

İNDİRGEMELİ DİZİ

Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanan dizilere indirgemeli dizi denir. Bu elemanlar arasındaki bağıntıya da indirgeme bağıntısı denir.

Örnek...20 :

Uygun şartlarda tanımlı (a_n) dizisinin elemanları arasında $a_{2n+1} - a_{2n-1} = n$ bağıntısı var ve $a_1 = 9$ ise a_7 kaçtır?

Örnek...21 :

Uygun şartlarda tanımlı (a_n) dizisinin elemanları arasında $a_{n+1} = \frac{4 \cdot a_n + 5}{4}$ bağıntısı var ve $a_1 = \frac{1}{4}$ ise a_{31} kaçtır?

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

DİZİLERİN EŞİTLİĞİ

İki dizinin eşit olması için aynı sıradaki terimleri birbirine eşit olmalıdır. (a_n) ve (b_n) iki dizi olmak üzere her pozitif n tamsayısı için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizilerine eşit diziler denir ve bu eşitlik $(a_n) = (b_n)$ olarak yazılır.

Örnek...22 :

$(p_n) = \left(\frac{3n+12}{n+4}\right)$ dizisi ve $(k_n) = (3 \cdot \cos 2n\pi)$ dizisi eşit dizilerdir çünkü bu dizilerin genel terimleri eşit ve 3 tür.

DİZİLERDE İŞLEMLER

1. Toplama ve Çıkarma

İki diziyi toplamak veya çıkarmak için bu dizilerin genel terimlerinde toplama ve çıkarma yapılır.

$$(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$$

2. Çarpma - Bölme

İki diziyi çarpmak için bu dizilerin genel terimleri çarpılır.

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

İki diziyi bölmek için de bu iki dizinin genel terimleri bölünür.

$$(a_n) : (b_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right), b_n \neq 0$$

Bir diziyi sabitle çarpmak için de bu dizinin genel terimini sabitle çarpmak yeterlidir.

$$c(a_n) = (c \cdot a_n)$$

Örnek...23 :

$(a_n) = (n+2)$, $(b_n) = \left(3 - \frac{n}{2}\right)$ dizileri için istenen dizileri hesaplayınız.

$$(a_n) + (b_n)$$

$$(a_n) \cdot (b_n)$$

$$(b_n) : (a_n)$$

$$3(a_n) + 2(b_n)$$

SONLU DİZİ

$A_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ kümesi bir p elemanlı sonlu küme olmak üzere tanım kümesi $A_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ olan her diziye bir p terimli sonlu dizi denir.

Örnek...24 :

$A_p = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ $f: A_p \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n = n^2$ genel terimiyle verilen dizi, 100 terimli sonlu bir dizedir.

Örnek...25 :

$(b_n) = (13 - n^2)$ sonlu dizisinin tüm terimleri -100 den büyükse en küçük terimi kaçtır?

Örnek...26 :

$(a_n) = (\sqrt{16-n})$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır?

Örnek...27 :

$(a_n) = (\tan(n^\circ))$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır

SABİT DİZİ

Bütün terimleri birbirine eşit olan dizilere sabit diziler denir.

$$(a_n) = (-2, -2, -2, -2, \dots, -2, \dots)$$

dizisinin her terimi -2 olduğundan sabit dizedir.

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

Uyarı

$(a_n)=(P(n))$ yani polinom tipinde bir dizi sabitse dizide n içeren terimler varsa bu terimlerin katsayıları 0 olmalıdır.

Örnek...28 :

$(s_n)=((3-k)n^2+(2m+1)n-m.k+5)$ dizisi sabit dizi ise s_{189} kaçtır?

Uyarı

$(a_n)=\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$ yani rasyonel ifade tipinde bir dizi sabitse dizide pay ve paydada n içeren terimlerin eşit dereceli olanlarının katsayıları orantılı olmalıdır.

Örnek...29 :

$(p_n)=\left(\frac{3n+15}{n+5}\right)$ dizisi sabit dizidir

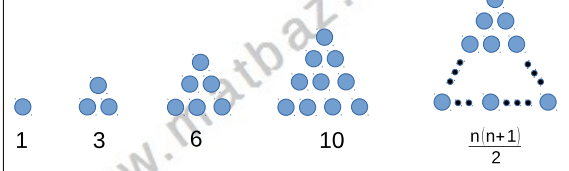
Örnek...30 :

$(x_n)=\left(\frac{an+3}{n+7}\right)$ dizisi sabit dizi ise a kaçtır?

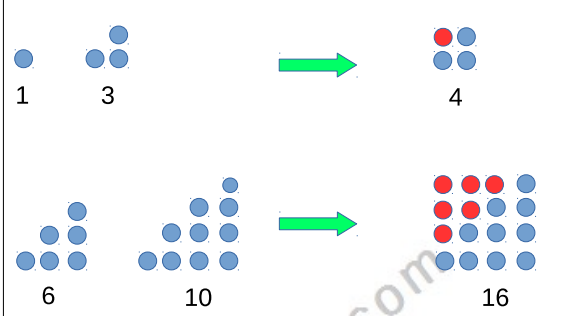
Örnek...31 :

$(x_n)=\left(\frac{(a-2)n^2-2n+4}{bn+7}\right)$ dizisi sabit dizi ise $a+b$ kaçtır?

Üçgensel sayılar: 1 den n ye kadar ardışık sayıların toplamını veren sayılara üçgensel sayılar denir.
1,3,6,10,, sayıları üçgensel sayılardır



Karesel sayılar: Ardışık 2 üçgensel sayının toplamı bir kare sayıdır.
 $1+3=4=2^2$
 $3+6=9=3^2$



Fibonacci dizisi, her sayının kendinden öncekiyle toplanması sonucu oluşan bir sayı dizisidir.

$$F_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ F(n-1)+F(n-2) & n>1 \end{cases}$$

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Bu şekilde devam eden bu dizide sayılar birbirleriyle oranlandığında altın oran ortaya çıkar, yani bir sayı kendisinden önceki sayıya bölündüğünde altın orana $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ gittikçe yaklaşan bir dizi elde edilir.

Örnek...32 :

5 basamaklı bir merdiveni her seferinde

a) 1 ya da 2 adım atarak çıkan bir kişi en çok kaç farklı biçimde çıkabilir?

a) 1 ya da 2 ya da 3 adım atarak çıkan bir kişi en çok kaç farklı biçimde çıkabilir

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

DEĞERLENDİRME

1) $a_n - a_{n+1} = \frac{3}{2}$ ve $a_6 = -12$ ise a_{24} kaçtır?

2) $(c_n) = \left(\frac{n^3}{n+5}\right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

3) $(a_n) = \left(\frac{n^3 - 9n^2 - 18n}{2n - 7}\right)$ dizisinin kaç terimi negatiftir?

4) $(b_n) = (\sec(n^\circ))$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır?

5) k bir tamsayı olmak üzere, genel terimi $a_n = \begin{cases} 3n & n=3k \\ 3n+1 & n=3k+1 \\ 2+3n & n=3k+2 \end{cases}$ olan dizisinin ilk üç terimi toplamı kaçtır?

6) Genel terimi $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 2}\right)$ olan dizisinin ilk 10 terimi toplamı kaçtır?

7) $(a_n) = ((k+2)n^3 + (2m+1)n^2 - (k.m-p)n + 5)$ dizisi sabit dizi ise a_3 kaçtır?

8) $(k_n) = \left(\frac{3n-2x}{9-2n}\right)$ dizisi sabit dizi ise x kaçtır?

9) $(a_n) = (3n-2)$, $(b_n) = \left(1 + \frac{n}{2}\right)$ dizileri için $c_n = (a_n - 4.b_n)$ dizisinin ikinci terimi kaçtır?

10) $(u_n) = (24 - n^2 - 4n)$ dizisinin en büyük terimi nedir?

11) $(u_n) = (3n^2 - 19n + 7)$ dizisinin en küçük terimi nedir?

12) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin en çok kaç alt kümesinde ardışık 2 terim bulunmaz ?