

TÜREV UYGULAMALARI

ASİMPTOTLAR

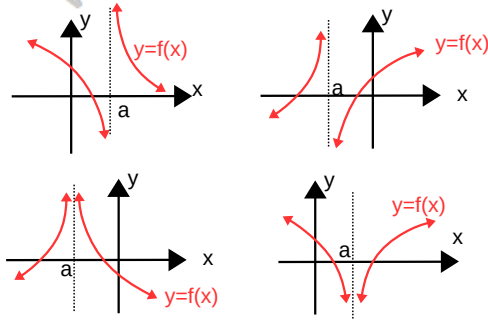
ASİMPTOTLAR

Asimptotlar fonksiyona sonsuzda teğet olan doğru veya eğrilerdir. Asimptotlar genelde kesirli ve köklü fonksiyonlarda vardır.

1. Düşey asimptot

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

eşitliklerinden biri sağlanıyorsa $x=a$ doğrusu $f(x)$ fonksiyonun bir düşey asimptotudur.



Uyarı 1

Düşey asimptotlar genelde rasyonel fonksiyonlarda paydanın kökünde karşımıza çıkar (logaritma fonksiyonun da düşey asimptotları gibi fonksiyonları hariç tutuyoruz) fakat $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde bir fonksiyon için $Q(a)=0$ olması $x=a$ nın düşey asimptot olması için tek başına yeterli değildir. Bu noktada limitlerin en az biri $\pm\infty$ olmalıdır.

Örnek...1 :

Eğrilerin düşey asimptotlarını bulunuz.

1) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

2) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$

3) $f(x) = \ln(x-2)$

4) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 9}$

Yok

Yatay ve Eğik Asimptotlar :

$y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ olacak}$$

şekilde bir $g(x)$ polinom fonksiyonu varsa bu polinoma derecesine göre yatay, eğik veya eğri asimptot denir.

2. Yatay Asimptot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - c] = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - c] = 0 \text{ olacak}$$

şekilde sabit bir $g(x)=c$ polinomu varsa bu fonksiyona f fonksiyonun yatay asimptotu denir.

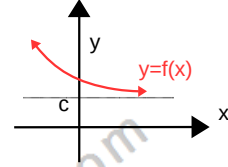
Başka bir deyişle $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)] = c$ veya

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = c$ ise $y=c$ doğrusuna $y=f(x)$ in yatay asimptotu denir.

Şekilde $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)] = c$

olduğundan ,

$y=c$ yatay asimptottur



Not $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunda

(P ve Q birer polinom) durumları inceleyelim

1. $\text{der}P = \text{der}Q$ ise başkatsayı oranı yatay asimptottur.

2. $\text{der}P < \text{der}Q$ ise $y=0$ yatay asimptottur

3. $\text{der}P > \text{der}Q$ ise yatay asimptot yoktur. Eğri veya eğik asimptot vardır

Örnek...2 :

Eğrilerin yatay asimptotlarını varsa bulunuz.

1) $f(x) = \frac{7}{x}$

2) $f(x) = \frac{2x^2 + 73x + 4}{x^2 - x}$

3) $f(x) = \frac{5x^3 - 3x^5}{x^2 - x^5 + \sqrt{2}}$

TÜREV UYGULAMALARI

ASİMPTOTLAR

4) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 2}$

yok

5) $f(x) = 53^x$

0

6) $f(x) = \log_2\left(\frac{16x - 3x}{2x + 5}\right)$

yok

7) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$

1/2

8) $f(x) = x + \frac{3}{x}$

yok

9) $f(x) = \frac{\pi x^2 + x + 1}{e^x}$

0

UYARI

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$ ifadesinde $y = B(x)$ derecesine göre yatay, eğik vveya eğri asimptotlardan biridir

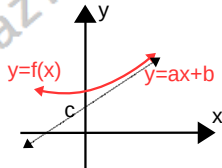
3. Eğik Asimptot

$y = f(x)$ fonksiyonu için

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ olacak biçimde 1.

dereceden bir g fonksiyonu bulunabiliyorsa bu fonksiyona eğik asimptot denir.

Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun eğik asimptotu $y = ax + b$ doğrusudur



Örnek...3 :

Fonksiyonların eğik asimptotunu bulunuz

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

$y = x$

2) $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 2}{x - 1}$

$y = 3x + 9$

3) $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$

$y = x^2 + x + 1$

NOT

$a > 0$ için $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonunun eğik asimptotları $y = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ olmaktadır.

Örnek...4 :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 4}$ fonksiyonunun eğik asimptotlarını bulunuz

$y = x + 4, y = -x - 4$

Örnek...5 :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ fonksiyonunun eğik asimptotlarını bulunuz

$y = x + 2,5 \quad y = -x - 2,5$

TÜREV UYGULAMALARI

ASİMPOTLAR

Örnek...6 :

$f(x)=2x-3+\sqrt{x^2+2x}$ fonksiyonunun eğik asimptotları hangi noktada kesişir?

(-1,-5)

4.Eğri Asimptot

Eğer $y=f(x)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)-g(x)]=0 \text{ ve } \text{der}[g(x)]>1$$

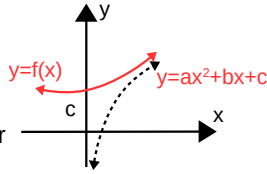
oluyorsa $g(x)$ e eğri asimptot denir.

Şekilde $y=f(x)$

fonksiyonunun eğik

asimptotu

$y=ax^2+bx+c$ eğrisidir



Örnek...7 :

$f(x)=\frac{x^3+1}{x}$ eğrisinin eğri asimptotunu bulunuz.

$y=x^2$

Örnek...8 :

$f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-12}$ fonksiyonunun asimptotları ve x eksenine sınırlandırılmış bölgelerin alanı kaç birim karedir?

14,5

Örnek...9 :

$f(x)=\frac{nx^2+(2+n)x+3}{x}$ fonksiyonunun asimptotlarından biri $y=3x+m$ ise m-n kaçtır?

2

Örnek...10 :

$f(x)=\frac{5x^2}{nx^2-3x+2}$ fonksiyonunun sadece yatay asimptotu var ise n nasıl seçilmelidir?

$n>9/8$

Örnek...11 :

$f(x)=y$ fonksiyonunu için $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-5x]=e$ ise bu fonksiyonunun hangi tür asimptotu kesinlikle vardır?

$y=5x+e$

Örnek...12 :

$f(x)=\frac{mx-2}{x-n}$ fonksiyonu A(3,-2) ye göre simetrikse (m,n) kaçtır?

(-2,3)

TÜREV UYGULAMALARI

ASİMPTOTLAR

DEĞERLENDİRME

1) Düşey ,yatay eğik veya eğri asimtotlarını bulunuz

a) $f(x) = \frac{x+7}{x-3}$

$x=3, y=1$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+x-6}$

$y=1, x=-3, x=2$

c) $f(x) = \frac{x+2|x|}{3x-6}$

$x=2, y=1, y=-1/3$

d) $f(x) = \cot x$

$k.\pi$

e) $f(x) = \frac{x}{2+\sin x}$

yok

f) $f(x) = \log(x^2-16)$

$x=-4, x=4$

g) $f(x) = 7^{-x}$

$y=0$

h) $f(x) = \sqrt{x^2-4x} - 2x$

$y=-x+2, y=-3x+2$

i) $f(x) = \frac{2x^3+3x^2+5x+4}{x^2-1}$

$x=1, y=2x+3$

j) $f(x) = \sqrt{x^2+5x}$

$y=x+2,5, y=-x-2,5$

k) $f(x) = 3x+2.\sqrt{x^2+3x}$

$y=5x+3, y=x-3$

2) $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$ fonksiyonunun asimptotları ve y eksenine sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

4

3) $f(x) = \frac{(n-3)x^2+(n+1)x+3}{x+2}$ fonksiyonun eğik asimptotu yoksa yatay asimptotu nedir?

$y=4$

4) $f(x) = \frac{mx^2-2}{x-n}$ fonksiyonu A(4,1) ye göre simetrikse m.n kaçtır?

1/2