

KARMAŞIK SAYILAR – 3

(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

KARMAŞIK SAYININ KUTUPSAL (TRİGONOMETRİK) GÖSTERİMİ

$z = a + bi$
karmaşık sayısının
kartezyen koordinatları
 $z = (a, b)$ dir.
Ya da görüntüsü A noktasıdır.

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow$$

$z = a + bi$ standart gösteriminde a ve b nin eşitleri yerine yazılırsa.

$$z = r \cdot \cos \theta + i \cdot r \cdot \sin \theta \text{ olur.}$$

$z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ 'ye trigonometrik (kutupsal = polar) gösterim denir.
Daha kısa olarak; $z = r \cdot \text{cis } \theta$ biçiminde de gösterilir.

$z = (r, \theta)$ biçimindeki yazım ile **kutupsal koordinatlar** gösterilir.

ARGÜMENT

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının periyodu 2π olduğundan

$$z = r \cdot \text{cis } \theta = r \cdot \text{cis } (\theta + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

yazılabilir.

Bu z sayısını sağlayan sonsuz tane açı vardır.

" $\theta + 2k$ " açılara z'nin **ARGÜMENTLERİ** denir.

$0 \leq \theta < 2\pi$ olan θ açısına ise z karmaşık sayısının **ESAS ARGÜMENTİ** denir.

$$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(a + bi) = \theta \text{ biçiminde gösterilir.}$$

UYARI

$$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(a + bi) = \theta \text{ ise } \tan \theta = \frac{b}{a} \text{ yazılabilir.}$$

Alıştırmalar

Karmaşık sayısının kutupsal biçimini bulalım.

1) $z = 1 + i$

2) $z = 1 - i$

3) $z = \frac{-5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

Örnek...1 :

$z + 3 - 2i = 4 + 2i$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayısının argümenti x ise $\sec x$ nedir?

Örnek...2 :

$z = 2(\cos 20 - i \sin 20)$ ise z karmaşık sayısının argümenti kaç derecedir?

KARMAŞIK SAYILAR – 3

(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

Örnek...3 :

$z = -\cos 70 + i \sin 70$ ise z karmaşık sayısının argümenti kaç derecedir?

Örnek...4 :

$z = \sin 55 - i \cos 55$ ise z karmaşık sayısının argümenti kaç derecedir?

KUTUPSAL BİÇİMDE İŞLEMLER

$z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \Theta_1$ ve $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \Theta_2$ olmak üzere bunların çarpım ve bölümünü kolayca bulabilmek için karmaşık sayıların farklı bir gösterimini bilmemiz işlemleri anlamamızı kolaylaştırır.

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \text{ dir.}$$

Buna göre, $z_1 = r_1 \text{cis } \Theta_1$ ve $z_2 = r_2 \text{cis } \Theta_2$ ise

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \text{cis}(\Theta_1 + \Theta_2)$

2) $z_1^n = r_1^n \text{cis}(n \cdot \Theta_1)$

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{cis}(\Theta_1 - \Theta_2)$

olarak hesap edilir.

UYARI 1

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \Theta_1 + \Theta_2$$

$$\text{Arg}(z_1^n) = n \cdot \Theta_1$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \Theta_1 - \Theta_2$$

UYARI 2

Toplama ve çıkarma işlemlerinde dönüşüm formülleri kullanılabilir.

Örnek...5 :

$z_1 = 2 \cdot \text{cis } 18^\circ$ ve $z_2 = 3 \cdot \text{cis } 72^\circ$ ve

a) $z_1 \cdot z_2 = ?$ b) $z_1^5 = ?$ c) $\left(\frac{10 \cdot z_2^4}{z_1}\right) = ?$

Örnek...6 :

$z_1 = 5 \text{cis } 26^\circ$ ve $z_2 = 2 \text{cis } 17^\circ$ ise $z_1^3 \cdot z_2^6 = ?$

Örnek...7 :

$z_1 = 8 \text{cis } 20^\circ$ ve $z_2 = 2 \text{cis } 10^\circ$ ise

$$\frac{z_1^3}{z_2^6} = ?$$

KARMAŞIK SAYILAR – 3

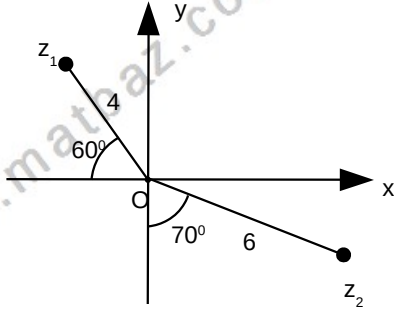
(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

Örnek...8 :

a) $z_1 \cdot z_2 = ?$

b) $\frac{z_1}{z_2} = ?$

c) $\text{Arg}\left(\frac{z_1^4}{z_2^2}\right) = ?$

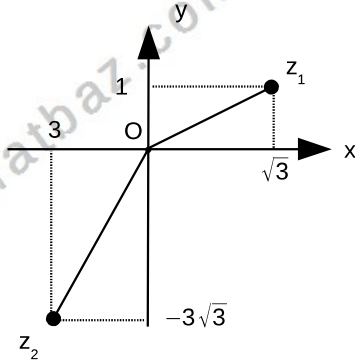


Örnek...9 :

a) $z_1 \cdot z_2 = ?$

b) $\frac{z_2}{z_1} = ?$

c) $\text{Arg}(z_1^3 \cdot z_2^2) = ?$



Örnek...10 :

n bir doğal sayı ve $z = (\sqrt{3} + i)^n$ eşitliğiyle verilen z sayısı negatif bir reel sayı ise z sayısının en büyük değeri kaç olabilir?

Örnek...11 :

$z_1 = 4\text{cis}70^\circ$ ve $z_2 = 4\text{cis}10^\circ$ ise $z_1 + z_2 = ?$

Örnek...12 :

$z_1 = 2\text{cis}15^\circ$ ve $z_2 = 2\text{cis}105^\circ$ ise $z_1 - z_2 = ?$

Örnek...13 :

$|z + \sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}| = 1$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının argümenti en çok kaç derece olabilir?

Örnek...14 :

x açısı dar bir açı olmak üzere,
 $z = 1 + \cos 2x + i \sin 2x$ ise $\text{Arg}(z) = ?$

KARMAŞIK SAYILAR – 3

(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

Örnek...15 :

x açısı dar bir açı olmak üzere $\frac{1+i.\tan x}{i}$ ise $\text{Arg}(z)=?$

Alıştırma

$\text{Arg}(z)=x$ olsun.
Aşağıdaki karmaşık sayıların argümentini x türünden bulunuz.

- 1) $\text{Arg}(-z)$
- 2) $\text{Arg}(z^{-1})$
- 3) $\text{Arg}(\bar{z})$
- 4) $\text{Arg}(-\bar{z})$
- 5) $\text{Arg}(i.\bar{z})$
- 6) $\text{Arg}(z.\bar{z})$

Örnek...16 :

$z_1 = 51-51.i$ $z_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}$ $z_3 = -61.i$ karmaşık sayıları için $\text{Arg}(z_1^3 \cdot \frac{z_2^4}{z_3})$ kaç derecedir?

Örnek...17 :

$z = -i\sqrt{3}+3$ Karmaşık sayısı veriliyor. $\text{Arg}(-\bar{z}^{-2})$ kaç derecedir?

Örnek...18 :

$z_1 = \text{cis}40$, $z_2 = \text{cis}130$ ise $|z_1+z_2|=?$

Örnek...19 :

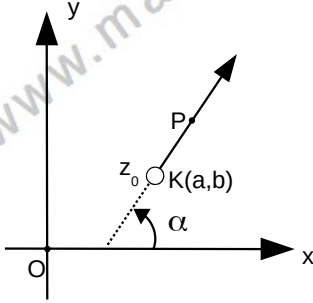
$\text{Arg}(z-2-2i) = 45^\circ$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarını noktaları düzlemde gösteriniz

KARMAŞIK SAYILAR – 3

(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

UYARI

$z_0 = a+ib$ karmaşık sayısının düzlemdeki görüntüsü $K(a,b)$ ise $\text{Arg}(z-z_0) = \alpha$ koşulunu sağlayan z sayıları JKP yarı doğrusu üzerindedir.



Örnek...20 :

$\text{Arg}(z-3-5i) = \frac{2\pi}{3}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarını noktaları düzlemde gösteriniz

Örnek...21 :

$\text{Arg}(z+3-2i) = \frac{5\pi}{3}$ şitliğini sağlayan z karmaşık sayılarını noktaları düzlemde gösteriniz

Örnek...22 :

$\text{Arg}(z-1) = \frac{2\pi}{3}$ ve $\text{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{6}$ şitliğini sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz

KARMAŞIK SAYILAR – 3

(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

DEĞERLENDİRME – 1

1) $z = \frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ karmaşık sayısının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

2) $z \cdot (3i+4) = 5-12i$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayısının argümenti x ise $\operatorname{cosec} x$ nedir?

3) $z = -3(\cos 50^\circ - i \sin 50^\circ)$ ise z karmaşık sayısının argümenti kaç derecedir?

4) $z_1 = 4\operatorname{cis} 32^\circ$ ve $z_2 = 3\operatorname{cis} 12^\circ$ ise $z_1^2 \cdot z_2^{-3} = ?$

5) $z_1 = 6\operatorname{cis} 56^\circ$ ve $z_2 = 4\operatorname{cis} 18^\circ$ ise $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1^3}{z_2^6}\right) = ?$

6) n bir doğal sayı ve $z = (i\sqrt{3}+1)^n$ eşitliğiyle verilen z sayısı negatif bir reel sayı ise z sayısının en büyük değeri kaç olabilir?

7) $|z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 1$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının argümenti en az kaç derece olabilir?

8) $z = -i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$ karmaşık sayısı veriliyor. $\operatorname{Arg}(z^4)$ kaç derecedir?

KARMAŞIK SAYILAR – 3

(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

9) $z_1=6\text{cis}67^\circ$ ve $z_2=8\text{cis}187^\circ$ ise $|z_1+z_2|=?$

10) $z_1 = \text{cis}20$, $z_2 = \text{cis}140$ ise $|z_1-z_2|=?$

11) $\text{Arg}(z+1-4i)=\frac{2\pi}{3}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarını noktaları düzlemde gösteriniz?

12) $\text{Arg}(z-4)=\frac{5\pi}{4}$ ve $\text{Arg}(z+2)=\frac{7\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz?

13) $\text{Im}(z^2)=9$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarını düzlemde gösteriniz?

www.matbaz.com

KARMAŞIK SAYILAR – 3

(KARMAŞIK SAYI TRİGONOMETRİK GÖSTERİMİ VE İŞLEMLERİ – ESAS ARGÜMENT VE ÖZELLİKLERİ)

DEĞERLENDİRME – 2

1) $z_1=1+2i$ $\text{Arg}z=2.\text{Arg}z_1$, $|z|=5$, $\text{Im}(z)<0$ ise z sayısını bulunuz?

2) $|z-2-i|=1$ ise $\text{Arg}(z)=\alpha$ nın en büyük değeri için $\tan\alpha=?$

3) $\text{Arg}(z-1+i)=\frac{\pi}{2}$ $|z|=3$ ise $\text{Im}(z)$ nin en büyük değeri kaçtır?

4) $z=4 \text{ cis}240^\circ$ karmaşık sayısını standart biçimde ifade ediniz.

5) $z_1=\text{cis}30^\circ$, $z_2=\text{cis}\alpha$, $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$ ise α nın en küçük pozitif değeri nedir?

6) $|z-\sqrt{3}-i|=1$ için $z_1=(1, \text{maks Arg}(z))$ ve $|z+\sqrt{3}-i|=1$ için $z_2=(1, \text{min Arg}(z))$ ise $|z_1-z_2|=?$

7) $\text{Arg}(z-1-i)=\frac{\pi}{4}$ eşitliğinin sağlayan z karmaşık sayılarını merkez kabul eden yarıçapları 1 den küçük olan çemberlerin kümesi A olsun. $B=\{x+iy: |x|+|y|\leq 2\}$ ise $A\cap B$ kümesinin alanı kaç birim karedir?

8) $\text{Im}(z^2)=9$ ve $|z|=6$ denklem sisteminin çözüm kümesi Karmaşık sayılar kümesinde kaç elemanlıdır.