

OLASILIK -1

KOŞULLU OLASILIK – BAĞIMSIZ OLAYLAR

KOŞULLU OLASILIK:

Bir E örnek uzayının herhangi iki olayı A ile B olsun. B olayının gerçekleşmiş olması halinde, A olayının olasılığına, "A olayının B ye bağlı koşullu olasılığı" denir ve bu olasılık $P(A|B)$ ile gösterilir.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

E uzayı eş olumlu ise $P(A|B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)}$

Örnek...1 :

A ve B aynı örnek uzayın olayları olmak üzere, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ ve $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ise

a) $P(A|B) = ?$ b) $P(B|A) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - x \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$a) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$b) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

Örnek...2 :

Düzgün bir zarın havaya atılması deneyinde tek sayı geldiği bilindiğine göre, bu sayının asal sayı olması olasılığı kaçtır?

$$E' = \{1, 3, 5\} \quad A = \{3, 5\}$$

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

Örnek...3 :

Bir sınıfta 10 erkek 5 kız öğrenci vardır. Kızlardan birinin adı Seda'dır. Sınıftan rastgele bir öğrenci seçildiği zaman kız olduğu bilindiğine göre bunun Seda olma yüzde kaçtır?

$$P(Seda) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{1}{5}$$

Örnek...4 :

Bir çift zarın atılması deneyinde zarlardaki sayılar toplamının 8 olduğu bilindiğine göre bu sayıların ikisinin de çift sayı olması olasılığı?

$$E' = \{(6,2), (2,6), (5,3), (3,5), (4,4)\}$$

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

Örnek...5 :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin alt kümeleri birer karta yazılıp, bir kutuya konuyor. Bu kutudan rastgele bir kart çekiliyor. Çekilen kartta kümenin 3 elemanlı bir küme olduğu bilindiğine göre, bu kümede 4'ün bulunma olasılığı nedir?

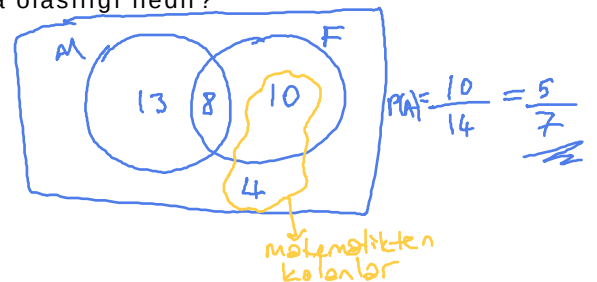
$$s(E) = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3!} = 56$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow s(A) = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$P(A) = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

Örnek...6 :

35 kişilik bir sınıfta, matematikten geçenlerin sayısı 21, fizikten geçenlerin sayısı 18 ve her iki dersten de geçenlerin sayısı 8 dir. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin matematikten kalan bir öğrenci olduğu bilindiğine göre fizikten geçen bir öğrenci olma olasılığı nedir?



OLASILIK -1

KOŞULLU OLASILIK – BAĞIMSIZ OLAYLAR

ÇARPMA KURALI

E bir eş olumlu örnek uzay ve A ve B bu örnek uzayın iki olayı olmak üzere,

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ koşullu ifadesi tekrar düzenlenerek $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ yazılarak çarpım kuralı elde edilir.

Örnek...7 :

Bir sınıfta 10 kız, 6 erkek öğrenci vardır. Sınıftan ard arda iki öğrenci seçiliyor. Birincinin kız ve ikincinin erkek olma olasılığı nedir? (İkinci kişi kalan kişiler arasından seçiliyor)

$$P(K\bar{E}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} = \frac{60}{240} = \frac{1}{4}$$

Örnek...8 :

6 yüzücü, 4 koşucu arasından 2 kişi seçilecektir. Bu iki kişinin de yüzücü olması olasılığı nedir?

$$P(YY) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

Örnek...9 :

Bir grupta 5 kız ve 3 erkek öğrenci vardır. Gruptan seçilecek 3 kişinin de kız olma olasılığı nedir?

$$P(KKK) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

Örnek...10 :

5 kız, 5 erkek öğrenci arasından rastgele 2 öğrenci seçilirse,

a) öğrencilerden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı nedir?

$$P(KE) + P(EK) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

b) öğrencilerden birincinin kız, ikincinin erkek olma olasılığı nedir?

$$P(KE) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

Örnek...11 :

Bir kutuda 4 kırmızı, 3 mavi bilye vardır. Bu torbadan ard arda ve seçilen tekrar geri konmamak koşuluyla 4 bilye alınıyor. Bunlardan ilk ikisinin kırmızı, diğerlerinin mavi olasılığı nedir?

$$P(KKMM) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{70}$$

Örnek...12 :

Her birinde 2 yeşil, 4 sarı top bulunan iki torbanın birincisinden bir top alınıp ikincisine ve sonra ikincisinden bir top alınıp birincisine konulduğu zaman, renk bakımından ilk durumu elde etme olasılığı nedir?

seçilen neyse diğerine atıldığında yine aynı türden seçilmeli

$$P(YY) + P(SS) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{26}{42} = \frac{13}{21}$$

OLASILIK -1

KOŞULLU OLASILIK – BAĞIMSIZ OLAYLAR

BAĞIMSIZ OLAYLAR

A ve B aynı örnek uzayın olayları olmak üzere $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ise A ve B olaylarına bağımsız olaylar denir.

Örnek...13 :

Düzgün bir para ile düzgün bir zar birlikte atılıyor. Paranın tura ve zarın çift sayı gelme olasılığı nedir?

$$P(T \cap 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Örnek...14 :

Bir kutuda 2 si bozuk 5 kalem, ikinci bir kutuda 3 ü bozuk 7 kalem vardır. Kutulardan birer kalem alınıyor. İki kaleminde sağlam olması olasılığı nedir?

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

Örnek...15 :

2 yüzü mavi, 3 yüzü kırmızı ve diğer yüzü sarı olan bir zar ard arda 3 kez atılıyor. Üst yüze gelen rengin üç defa mavi gelme olasılığı nedir?

$$P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{27}$$

Örnek...16 :

Düzgün bir para 4 defa atıldığında en az bir tura gelme olasılığı nedir?

$$1 - \text{hiç tura} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Örnek...17 :

İki torbadan birinde 3 kırmızı, 3 mavi ve diğerinde 5 kırmızı 3 mavi bilye vardır. Rastgele seçilen bir torbadan yine rastgele seçilen bir bilyenin kırmızı olması olasılığı nedir?

$$P(I \cap K) + P(II \cap K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{9}{16}$$

1. den seçilir 2. den seçilir

Örnek...18 :

Bir hedefe atış yapan Ali'nin hedefi vurma olasılığı 4/5, Ayşe'nin hedefi vurma olasılığı 2/3 olduğuna göre, yapılan birer atış sonunda

a) sadece Ali'nin hedefi vurma olasılığı nedir?

$$P(A_1 \cap A_2^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

b) hedefin vurulmuş olma olasılığı nedir?

$$1 - \text{vurulmadı} = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{15}$$

Örnek...19 :

Bir zar ile bir madeni para birlikte atılıyor.

a) Oluşabilecek durumları ağaç diyagramı ile gösteriniz.

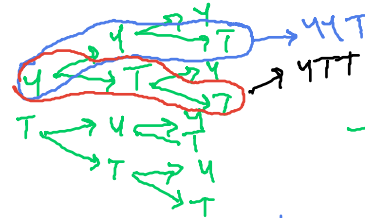
b) Paranın yazı veya zarın tek sayı gelme olasılığını hesaplayınız



$$P(Y \cup T) = P(Y) + P(T) - P(Y \cap T) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Örnek...20 :

Bir madeni para 3 defa atılıyor. Bir ağaç diyagramı çizerek üç paranın tam olarak ikisinin aynı gelme olasılığını hesaplayınız.



$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

İkbi gösterilen 2 durumun aynı olduğu 6 durum sayılır.

Bir deneyin sadece bir çıktısından oluşan kümeye **basit olay**, birden çok çıktısından oluşan kümeye **bileşik olay** denir.

OLASILIK -1

KOŞULLU OLASILIK – BAĞIMSIZ OLAYLAR

DEĞERLENDİRME

- 1) $(X+2)^9$ açılımındaki seçilen terimlerden birinin derecesinin 5 den küçük olmadığı bilindiğine göre bu terimin derecesinin 7 den büyük olma olasılığı kaçtır?
- $x^9 \cdot x^8 \cdot x^7 \cdot x^6 \cdot x^5 \rightarrow P(A) = \frac{2}{5}$
İstenen

- 2) $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin alt kümeleri birer karta yazılıp, bir kutuya konuyor. Bu kutudan rastgele bir kart çekiliyor. Çekilen kartta kümenin 4 elemanlı bir küme olduğu bilindiğine göre, bu kümede 4'ün bulunmama olasılığı nedir?
- $s(E) = \binom{7}{4} = 35$
 $s(A) = \binom{6}{4} = 15$
 $P(A) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

- 3) Bir torbadaki yeşil bilyelerin sayısı mavi bilyelerin sayısının 2 katıdır. Art arda seçilen iki bilyenin de mavi olma olasılığı %10 ise ilk durumda toplam bilye sayısı kaçtır?

$Y \rightarrow 2k$
 $M \rightarrow k$
 $\frac{k}{3k} \cdot \frac{k-1}{3k-1} = \frac{10}{100}$
 $k=7$
 $3k = 3 \cdot 7 = 21$

- 4) Bir kutuda büyüklüğü aynı 4 mavi, 3 kırmızı, 4 sarı bilye vardır. Art arda seçilen üç bilyenin farklı renklerde gelme olasılığı hangisidir?

$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{48}{165} = \frac{16}{55}$

- 5) Aynı türün kitapları birbirinden farklı olmak koşuluyla 5 matematik, 6 fizik, 3 biyoloji kitabı bir rafa dizilecektir. Fizik kitaplarının bir arada bulunduğu bilindiğine biyoloji kitaplarının da yan yana gelmiş olma olasılığı kaçtır?

$1 [Fizik + 5M + 3B] | Fizik + Biyo + 5M$
 $P(A) = \frac{7! \cdot 6! \cdot 3!}{9! \cdot 6!} = \frac{6}{9 \cdot 8} = \frac{1}{12}$
5+3+1 → fizikler kendi içinde

- 6) İki zar ve bir para atıldığında zarların toplamın 7 den daha büyük veya paranın yazı gelme olasılığı kaçtır?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= \frac{15}{36} + \frac{1}{2} - \frac{15}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{51}{72}$
15 durum
1/2

- 7) 180 sayısının pozitif bölenlerinden biri seçildiğinde seçilen sayının çift olduğu bilindiğine göre seçilen sayının 4'ün katı olma olasılığı kaçtır?

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
 $E \rightarrow \frac{2}{2^1} \cdot \frac{3}{3^1} \cdot \frac{5}{5^1} \rightarrow 12 \text{ durum}$
 $A \rightarrow \frac{1}{2^1} \cdot \frac{3}{3^1} \cdot \frac{2}{5^1} \rightarrow 6 \text{ durum}$
 $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

- 8) 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarıyla 3 basamaklı sayılar yazılıyor. Seçilen bir sayının en az iki basamağının aynı olduğu bilindiğine göre sayının 400 den büyük olma olasılığı kaçtır?

$s(E) = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{\text{tam}} - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{\text{farklılar}} = 216 - 120 = 96 \text{ durum}$

$s(A) = \frac{3}{456} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{4} - \frac{3}{456} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = 108 - 60 = 48$
 $P(A) = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$

(önce tümünü bulduk sonra rakamları farklıları çıkardık)
Koşulu

- 9) Bir para ve bir zar atılıyor. Bir ağaç diyagramı çizerek paranın tura veya zarda asal sayı gelme olasılığını hesaplayınız.

