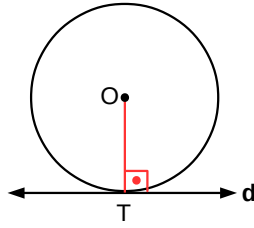


ÇEMBERDE TEĞET

1. Çemberin herhangi bir teğeti, değme noktasından geçen yarıçapa diktir.

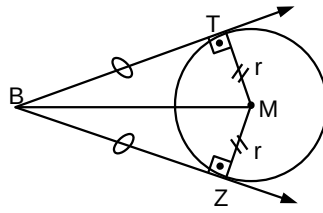
$$[OT] \perp d$$



2. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğetlerin uzunlukları eşittir. [BT ve [BZ M merkezli çemberin teğetleri olmak üzere, $|BT|=|BZ|$ $|MT|=|MZ|$ dir.

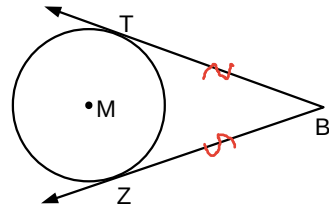
MTBZ dörtgeninin deltoid olduğuna dikkat ediniz.

$$m(\widehat{MBT})=m(\widehat{MBZ}) \quad m(\widehat{BMT})=m(\widehat{BMZ}) \text{ dir.}$$



Örnek...1 :

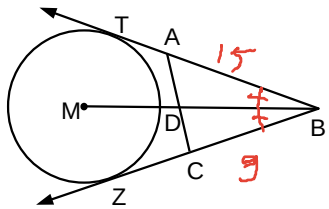
M merkezli çemberin teğetlerinin değme noktaları T ve Z dir.
 $|BT|=5x-10$ br
 $|BZ|=2x+11$ br
olduğuna göre, x kaç birimdir?



$$5x-10=2x+11 \quad 3x=21 \quad x=7$$

Örnek...2 :

M merkezli çemberin teğetlerinin değme noktaları T ve Z dir.
 $|AB|=15$ br
 $|BC|=9$ br
olduğuna göre, $\frac{|AD|}{|CD|}$ oranı kaçtır?



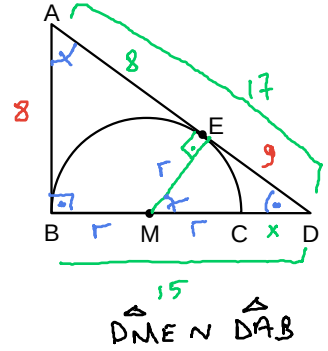
$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

Örnek...3 :

M, yarım çemberin merkezi ve B ile E teğet değme noktalarıdır.
ABC üçgeninde
 $|AB|=8$ br
 $|DE|=9$ br
olduğuna göre, $|CD|$ kaç birimdir?

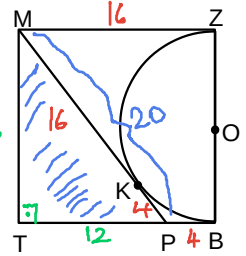
$$\frac{r}{8} = \frac{r+x}{17} = \frac{9}{15}$$

$$r = \frac{24}{5} \Rightarrow x = \frac{27}{5}$$



Örnek...4 :

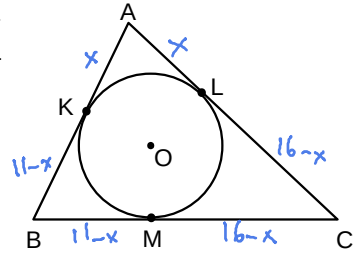
MTBZ bir kare, O yarım çemberin merkezi B, K ve Z teğet değme noktalarıdır.
 $|MK|=16$ br
 $|KP|=4$ br
olduğuna göre, Alan(MTP) kaç birim karedir?



$$A(MTP) = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ br}^2$$

Örnek...5 :

O merkezli çember ABC üçgenine K, L ve M noktalarında teğettir.
 $|AB|=11$ br
 $|BC|=15$ br
 $|AC|=16$ br
olduğuna göre, $|AL|$ kaç birimdir?

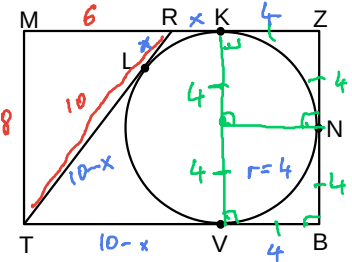


$$11-x+16-x=15$$

$$27-2x=15, 2x=12 \Rightarrow x=6=|AL|$$

Örnek...6 :

MTBZ dikdörtgen ve BTRZ yamuktur.
K, L, V ve N teğet değme noktalarıdır.
 $|BZ|=8$ br
 $|TR|=10$ br
olduğuna göre, $|LR|$ kaç birimdir?

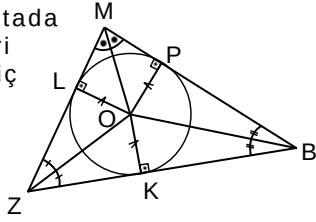


$$10-x+4=4+x+6 \rightarrow 2x=4$$

$$x=2=|LR|$$

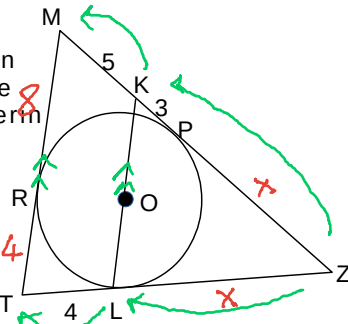
ÜÇGENİN İÇ TEĞET ÇEMBERİ

3. Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir. Şekilde O iç teğet çemberin merkezidir



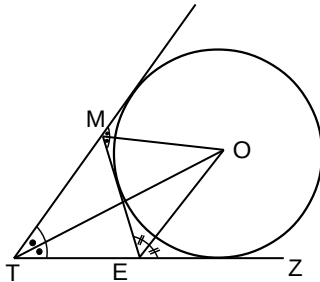
Örnek...7 :

Şekilde MTZ bir üçgendir. P, L, R üçgen üzerinde teğet değme noktaları ve O çemberin merkezidir. KL//MT, |KP|=3 br, MK=5 br, |TL|=4 br olduğuna göre Ç(MTZ) kaç birimdir?



ÜÇGENİN DIŞ TEĞET ÇEMBERİ

4. Üçgende iki dış açıortay ve diğer iç açının açıortayı bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin dış teğet

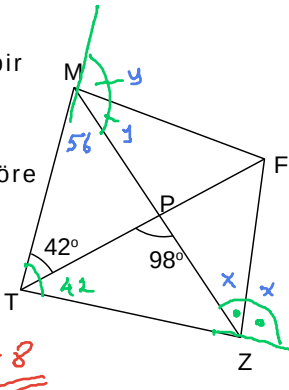


çemberlerinden birinin merkezidir.

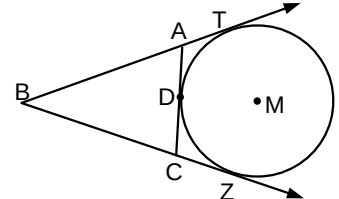
Örnek...8 :

Şekilde F noktası MTZ bir üçgeninin dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir. m(T)=42° ve m(TPZ)=98° olduğuna göre m(MZF)-m(PMF) kaçtır?

$$\begin{aligned} m(TMP) &= 98 - 42 = 56 \\ 2y + 56 &= 180 \quad y = 62 \\ 42 + 98 &= 2x \quad x = 70 \\ x - y &= 70 - 62 = 8 \end{aligned}$$

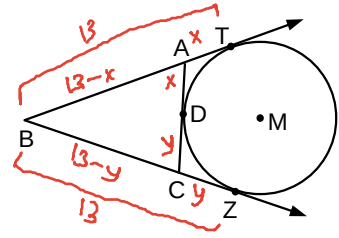


5. [BT ve [BZ M merkezli çemberin teğetleri, [AC] ise çembere D noktasında teğet olmak üzere, ABC üçgeni için Çevre(ABC)=|BT|+|BZ|=2. |BT| dir.



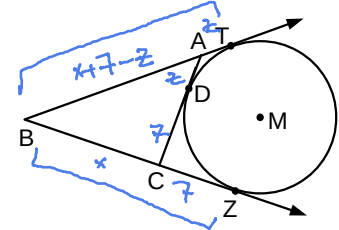
Örnek...9 :

M merkezli çember ABC üçgeninin kenarlarına T, D, Z noktalarında teğettir. |BT|=13 br olduğuna göre, Çevre(ABC) kaç birimdir?



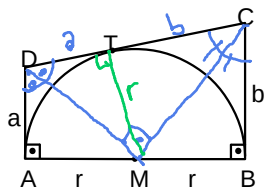
Örnek...10 :

M merkezli çember ABC üçgeninin kenarlarına T, D, Z noktalarında teğettir. Çevre(ABC)=32 br |CZ|=7 br olduğuna göre, |BC| kaç birimdir?



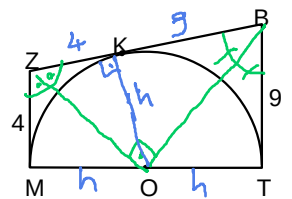
Örnek...11 :

Şekilde |AD|=a br |BC|=b br ve r yarıçaptır. A ve B teğet doğru parçalarının değme noktaları olmak üzere, $r^2 = a \cdot b$ bağıntısının geçerli olduğunu gösteriniz



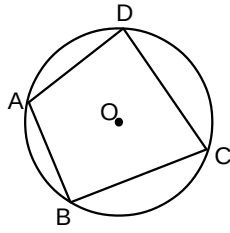
Örnek...12 :

O merkezli yarı çembere, MTBZ dörtgeni M, T ve K noktalarında teğettir. |MZ|=4 br |BT|=9 br olduğuna göre, |MT| kaç birimdir?



KIRIŞLER DÖRTGENİ

Çemberin kirişlerini kenar kabul eden dörtgene kirişler dörtgeni denir. Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünlerdir.

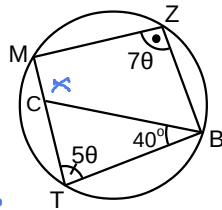


$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$$

$$m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$$

Örnek...13 :

MTBZ kirişler dörtgeni,
 $m(\widehat{MZB}) = 7\theta^\circ$
 $m(\widehat{MTB}) = 5\theta^\circ$
 $m(\widehat{CDK}) = 40^\circ$
 olduğuna göre,
 $m(\widehat{BCM})$ kaç derecedir?

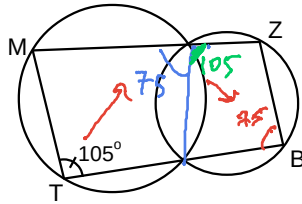


$$12\theta = 180 \quad \theta = 15^\circ$$

$$x = 5\theta + 40 = 75 + 40 = 115$$

Örnek...14 :

Şekilde verilen MTBZ dörtgeninin iki kenarı çemberlerin kesim noktalarından geçer ve köşeleri çemberler üzerindedir.



$m(\widehat{MTB}) = 105^\circ$ ise
 $m(\widehat{ZBT})$ kaç derecedir?

iki kirişler dörtgeniyle

Örnek...15 :

MTB ve MKR birer üçgendir. M, B, P ve R noktaları çember üzerindedir.

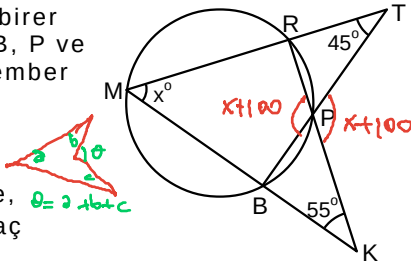
$$m(\widehat{MTB}) = 45^\circ$$

$$m(\widehat{MKR}) = 55^\circ$$

olduğuna göre, $\theta = 246 + c$

$m(\widehat{TMK}) = x$ kaç derecedir?

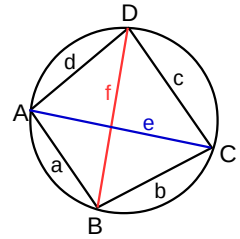
$$x + x + 100 = 180 \quad x = 40$$



ABCD kirişler dörtgeninin kenar uzunluklarının karşılıklı olarak çarpılıp toplanması köşegen uzunlukları çarpımına eşittir.

$$|AC|=e \quad |BD|=f \text{ ise}$$

$$e.f = a.c + b.d \text{ dir.}$$



Örnek...16 :

ABCD kirişler dörtgeni

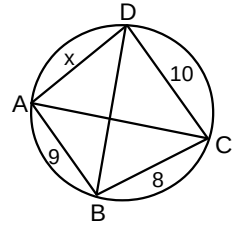
$$|AB|=9 \text{ br}$$

$$|BC|=8 \text{ br}$$

$$|CD|=10 \text{ br}$$

$$|AC|.|BD|=138 \text{ br}^2$$

olduğuna göre,
 $|AD|=x$ kaç birimdir?



$$138 = 8x + 90$$

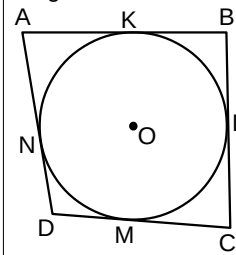
$$8x = 48$$

$$x = 6$$

TEĞETLER DÖRTGENİ

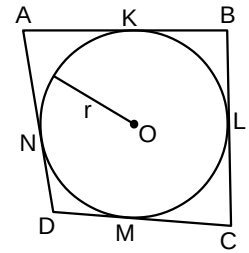
Bir çembere teğet olan dört doğru parçasının oluşturduğu dörtgene teğetler dörtgeni denir.

ABCD dörtgeninde K, L, M, N teğetlerin değme noktasıdır.



$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

$$\text{Alan}(ABCD) = \frac{\text{Çevre}(ABCD) \cdot r}{2}$$



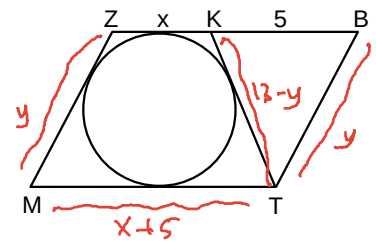
Örnek...17 :

MTBZ paralelkenar, MTK teğetler dörtgeni

$$|KB|=5 \text{ br}$$

Çevre(BTK)=18 br

olduğuna göre,
 $|ZK|=x$ kaç birimdir?



$$2x + 5 = 13 - y + y \rightarrow x = 4$$

ÇEMBERDE VE DAİRE -2

UZUNLUK

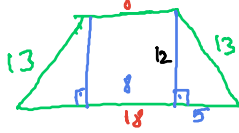
Örnek...18 :

MTBZ ikizkenar yamuğu bir teğetler dörtgenidir.

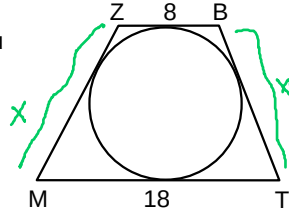
$$|BZ|=8 \text{ br}$$

$$|MT|=18 \text{ br}$$

olduğuna göre, Alan(MTBZ) kaçtır?



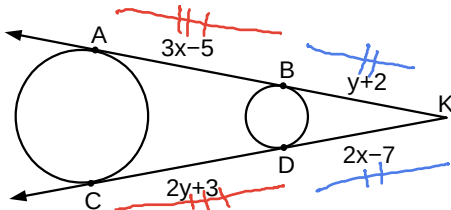
$$2x = 18 + 8 \rightarrow x = 13$$



$$A(MTBZ) = \frac{(8+18)}{2} \cdot 13$$

$$= 156 \text{ br}^2$$

Örnek...19 :



AKC açısı çemberlere A, B, C ve D noktalarında teğettir.

$$|AB|=3x-5 \text{ br}$$

$$|BK|=y+2 \text{ br}$$

$$|DK|=2x-7 \text{ br}$$

$$|CD|=2y+3 \text{ br}$$

olduğuna göre, |KA| uzunluğu kaç birimdir?

$$\begin{aligned} -2/2x - y &= 9 \\ + 3x - 2y &= 8 \end{aligned}$$

$$-x = -10$$

$$x = 10 \rightarrow y = 11$$

$$|KA| = 11 + 2 + 3 \cdot 10 - 5 = 38$$

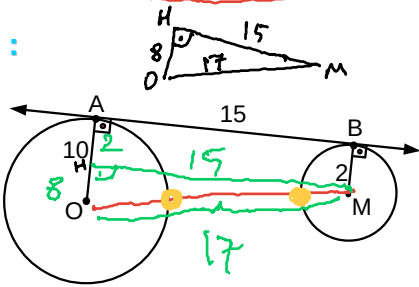
Örnek...20 :

O ve M merkezli çemberlerin ortak teğeti AB doğrusudur.

$$|OA|=10 \text{ br}$$

$$|BM|=2 \text{ br}$$

olduğuna göre, çemberler arası uzaklık en kaç birimdir?

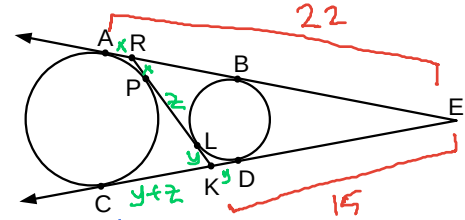


$$\text{en kısa mesafe} \quad 17 - 10 - 2 = 7 \text{ br}$$

Örnek...21 :

[EA ve [EC ışınları her iki çembere de teğet P ile L ise

çemberlerin teğet noktalarıdır. |EK|=15 br |AE|=22 br olduğuna göre, |KP| kaç birimdir?



$$15 + y + z = 22$$

$$y + z = 22 - 15 = 7$$

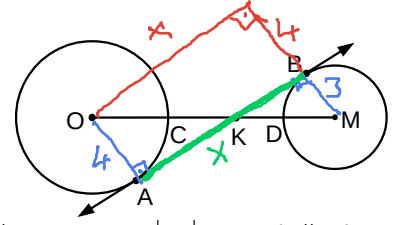
Örnek...22 :

AB doğrusu O ve M merkezli çemberlere A ve B noktalarında teğettir

$$|OA|=4 \text{ br}$$

$$|BM|=3 \text{ br}$$

|CD|=18 br olduğuna göre, |AB| uzunluğu kaç birimdir?



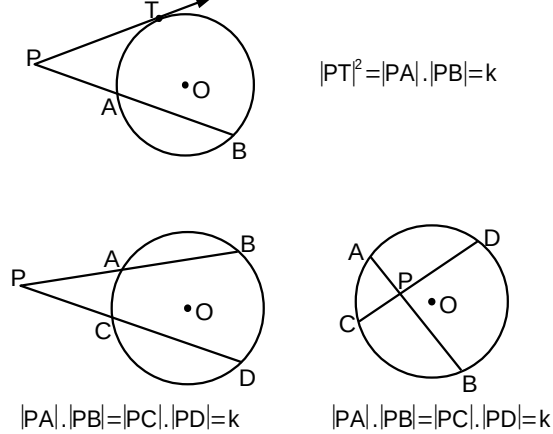
$$\begin{aligned} x &= 24 \\ |AB| &= 7 \end{aligned}$$

$$|OM| = 4 + 18 + 3 = 25$$

UYARI

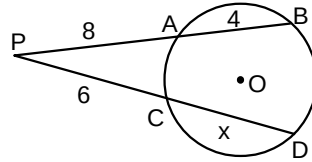
Düzlemde bir çember ve bir P noktası için, P den geçen ve çemberi kesen sonsuz doğru çizilebilir. Her kesen için P noktasının çemberi kestiği noktalara olan uzaklıkları çarpımı sabittir.

Şekilleri inceleyiniz



Örnek...23 :

O merkezli çember ile BPD açısı şeklindeki gibidir.
|PA|=8 br
|AB|=4 br
|PC|=6 br olduğuna göre, |CD|=x kaç birimdir?

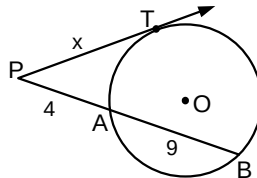


$$8 \cdot (8+4) = 6 \cdot (6+x)$$

$$x \approx 10$$

Örnek...24 :

O merkezli çember ile $\widehat{BPT}$ açısı T noktasında teğettir.
|PA|=4 br
|AB|=9 br olduğuna göre, |PT|=x kaç birimdir?



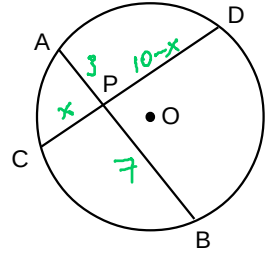
$$x^2 = 4 \cdot 13$$

$$x = \sqrt{52}$$

$$x = 2\sqrt{13}$$

Örnek...25 :

O merkezli çemberde
[AB] ∩ [CD] = {P}
|PB|=|PA|+4=7 br
|CD|=10 br olduğuna göre, |CP| uzunluğu kaç birimdir?



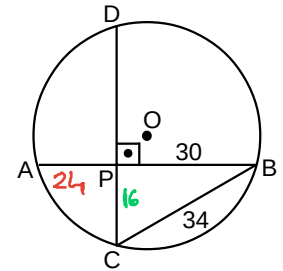
$$3 \cdot 7 = x \cdot (10-x)$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 7$$

Örnek...26 :

O merkezli çemberde
[AB] ⊥ [CD]
|BP|=30 br
|BC|=34 br
|AP|=24 br olduğuna göre, |PD| kaç birimdir?



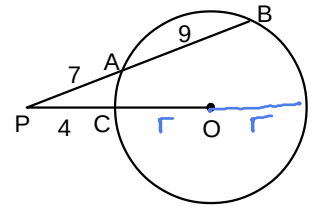
$$|PC|^2 = 34^2 - 30^2 \Rightarrow |PC| = 16$$

$$24 \cdot 30 = 16 \cdot |PD|$$

$$|PD| = 45$$

Örnek...27 :

O merkezli çemberde
|PA|=7 br
|AB|=9 br
|PC|=4 br olduğuna göre, çemberin yarıçapı kaç birimdir?



$$7 \cdot 16 = 4 \cdot (4+r)$$

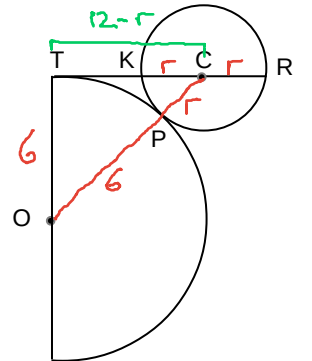
$$r = 12$$

UYARI

Birbirine teğet iki çemberin merkezlerini birleştiren doğru parçası teğet oldukları noktadan geçer.

Örnek...28 :

Şekildeki C ve O merkezli çemberler P noktasında dıştan teğettir. [TR], O merkezli yarım çembere T noktasında teğettir.
|TR|=12 br
|OT|=6 br olduğuna göre, |TK| kaç birimdir?



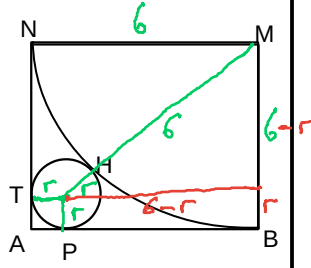
$$6^2 = x \cdot 12$$

$$r = 4$$

$$|TK| = 12 - 2r = 12 - 8 = 4$$

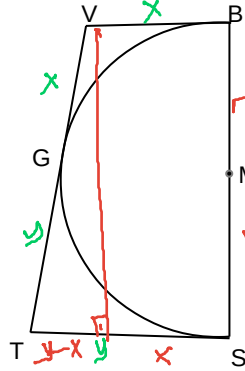
DEĞERLENDİRME - 1

- 1) Şekildeki M çeyrek çemberin merkezi ABMN çevresi 24 birim olan bir karedir. Karenin iki kenarına ve çeyrek çembere teğet olan çemberin yarıçapı kaç birimdir?



$$\begin{aligned}(6-r)\sqrt{2} &= 6+r \\ 6\sqrt{2}-r\sqrt{2} &= 6+r \\ 6\sqrt{2}-6 &= r\sqrt{2}+r = r(\sqrt{2}+1) \\ r &= \frac{6\sqrt{2}-6}{\sqrt{2}+1} = \frac{6(\sqrt{2}-1)^2}{6(3-2\sqrt{2})} = 6(3-2\sqrt{2})\end{aligned}$$

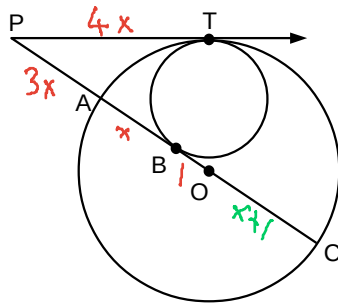
- 2) Şekildeki M merkezli yarı çemberde VT çembere G noktasında teğettir. $|VB| \cdot |TG| = 100 \text{ br}^2$ $[BV]$ ve $[TS]$ teğetler olduğuna göre, çemberin yarıçapı kaç birimdir?



$$x \cdot y = 100$$

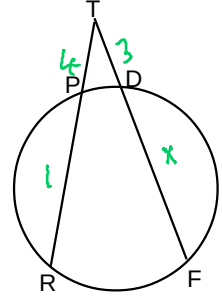
$$\begin{aligned}(x+y)^2 - (y-x)^2 &= 4r^2 \\ 4xy &= 4r^2 \\ 100 &= r^2 \rightarrow r = 10\end{aligned}$$

- 3) $[PT]$ çemberlerin ortak teğeti, $[PC]$ ise büyük çemberin keseni ve küçük çemberin teğettir. $|PA| = 3 \cdot |AB|$ $|BO| = 1 \text{ br}$ olduğuna göre, O merkezli çemberin çapı kaç birimdir?



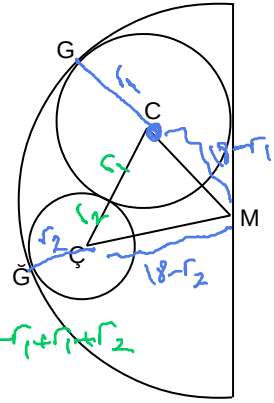
$$\begin{aligned}16x^2 &= 3x \cdot (5x+2) \\ \frac{16x}{3} &= 5x+2 \\ 16x &= 15x+6 \\ x &= 6 \\ 2R &= 7 \cdot 2 = 14\end{aligned}$$

- 4) Şekildeki çemberde, $|TP| = 4 \text{ br}$, $|TR| = 5 \text{ br}$, $|TD| = 3 \text{ br}$ ise $|FD|$ kaç birimdir?



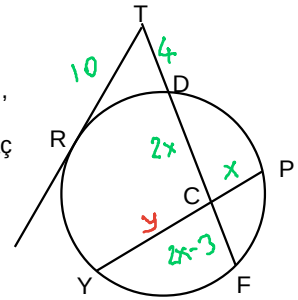
$$\begin{aligned}4 \cdot 5 &= 3(3+x) \\ x &= \frac{20}{3} - 3 \\ x &= \frac{11}{3} \text{ //}\end{aligned}$$

- 5) Şekilde C ve Ç çemberler birbirlerine dıştan ; M merkezli ve 18 birim yarıçaplı çembere içten teğettir. G ve Ğ teğet değme noktaları olmak üzere, $\triangle M\check{C}C$ üçgeninin çevresi kaç birimdir?



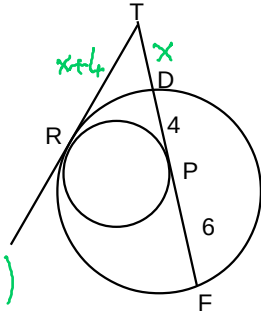
$$\begin{aligned}C_1(M \check{C} C) &= 18-r_2 + 18-r_1 + r_1+r_2 \\ &= 36\end{aligned}$$

- 6) Şekildeki çemberde TR çembere R de teğettir, $|TR| = 10 \text{ br}$, $|TD| = 4 \text{ br}$, $2 \cdot |CP| = |CD| = |CF| + 3$ olduğuna göre $|CY|$ kaç birimdir?



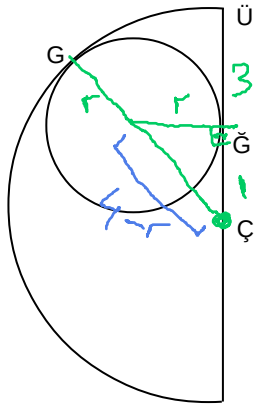
$$\begin{aligned}10^2 &= 4 \cdot (4+4x-3) \\ 25 &= 4x+1 \rightarrow x=6 \\ x \cdot y &= 2x \cdot (2x-3) \\ y &= 2(12-3) \rightarrow y = \frac{18}{2}\end{aligned}$$

- 7) Şekildeki TR çemberlere R de teğettir.
|DP|=4 br ,
|PF|=6 br ,
olduğuna göre,
|TF| kaç birimdir?



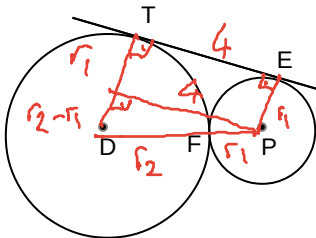
$$\begin{aligned}(x+4)^2 &= x \cdot (x+10) \\ x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 10x \\ 2x &= 16 \quad x = 8 \\ |TF| &= x + 10 = 18\end{aligned}$$

- 8) Şekildeki Ç merkezli yarım çemberde G ve G teğet değme noktalarıdır.
|ÇG|+1=|ÜG|=3br ,
ise küçük çemberin yarıçapı kaç birimdir?



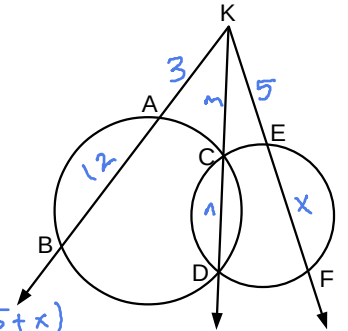
$$\begin{aligned}r^2 + 1^2 &= (3-r)^2 \\ r^2 + 1 &= 9 - 6r + r^2 \\ 8r &= 8 \\ r &= 1\end{aligned}$$

- 9) Şekildeki D ve P merkezli çemberler dıştan teğettir. TE ortak teğet , |TE|=4br , olduğına göre çemberlerin yarıçapları çarpımı kaçtır?



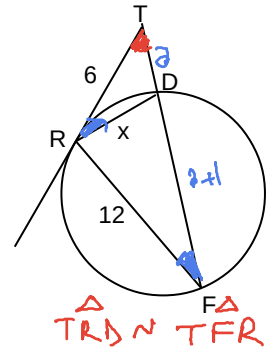
$$\begin{aligned}(r_2 + r_1)^2 &= 4^2 + (r_2 - r_1)^2 \\ 4r_1 r_2 &= 16 \\ r_1 r_2 &= 4\end{aligned}$$

- 10) [KB ve [KF çemberlerin keseni, [KD ise iki çemberin de ortak kesenidir
|AB|=4, |AK|=12 br
|KE|=5 br olduğına göre, |EF| uzunluğu kaç birimdir?



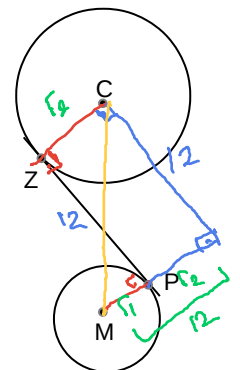
$$\begin{aligned}3 \cdot 15 &= m(m+1) = 5(5+x) \\ 9 &= 5+x \rightarrow x = 4\end{aligned}$$

- 11) Şekilde TR çembere R noktasında teğettir. D ∈ [TF] , |DF|-|TD|=1br
|TR|=6br olduğına göre, |DR|=x kaç birimdir?



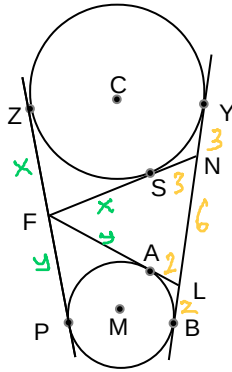
$$\begin{aligned}\frac{x}{12} &= \frac{2}{6} = \frac{6}{2x+1} \\ x &= 4 \\ \frac{x}{12} &= \frac{4}{6} \rightarrow x = 8\end{aligned}$$

- 12) Şekilde C ve M çemberlerin merkezli ve ZP ortak teğettir. |ZP|=12 br ve çemberlerin yarıçapları toplamı 12 birimse merkezler arası uzaklık kaç birimdir?



$$|CM| = 12\sqrt{2}$$

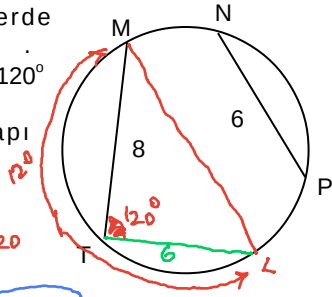
- 13) Şekilde C ve M çemberlerin merkezleridir YB ve ZP ortak teğetlerdir. [FN] S noktasında, [FL] A noktasında çemberlere teğettir. 3. |AL|=2, |NY|=|NL|=6br olduğuna göre, FLN üçgeninin çevresi kaç birimdir?



$$x+y=11 \quad (|ZP|=|BY|)$$

$$G(FLN) = x+y+11 = \frac{22}{2}$$

- 14) Şekildeki çemberde |NP|+2=|MT|=8br. $m(\widehat{TM})+m(\widehat{NP})=120^\circ$ olduğuna göre, çemberin yarıçapı kaç birimdir?

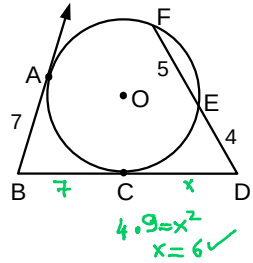


kosinüs koreni $\leftarrow |ML|^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 120$

$$|ML| = 2\sqrt{37}$$

sinüs koreni $\leftarrow \frac{2\sqrt{37}}{\sin 120} = 2R \rightarrow R = \frac{2\sqrt{37}}{\sqrt{3}}$

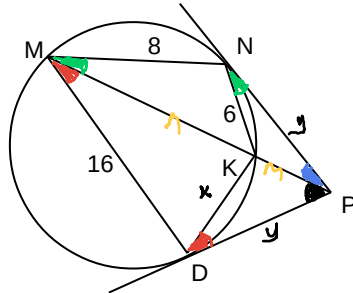
- 15) [BA ve [BD], O merkezli çemberin teğetleridir. |AB|=7 br |DE|=4 br, |EF|=5 br olduğuna göre, |BD| kaç birimdir?



$$|BD| = 7+x = 13$$

$$4 \cdot 9 = x^2 \rightarrow x = 6$$

- 16) Şekildeki çemberde [PN], [PD] teğettir. |NK|=6, |MN|=8 |MD|=16br olduğuna göre, |KD| kaç birimdir?

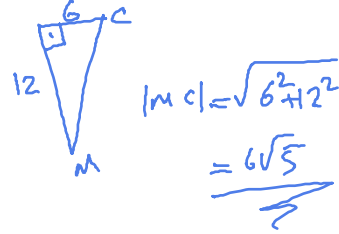


$$PNK \sim PMN \rightarrow \frac{6}{8} = \frac{m}{y} = \frac{y}{m+n}$$

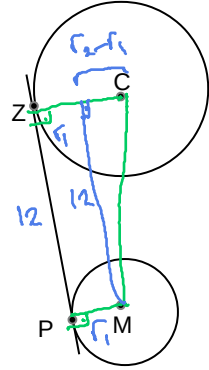
$$PDK \sim PMD \rightarrow \frac{m}{y} = \frac{x}{16} = \frac{y}{m+n}$$

$$\frac{x}{16} = \frac{6}{8} \rightarrow x = 12$$

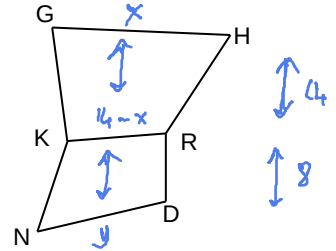
- 17) Şekilde C ve M çemberlerin merkezli ve ZP ortak teğettir. |ZP|=12br ve çemberlerin yarıçapları farkları 6 birimse merkezler arası uzaklık kaç birimdir?



$$|CM| = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$$



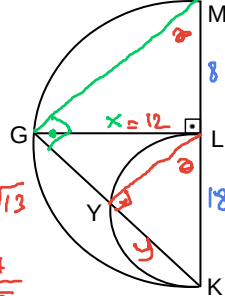
- 18) Şekildeki GKRH ve KNDR dörtgenleri teğetler dörtgenidir. Ç(GKRH)=28 ve Ç(KNDR)=16 ise |GH|-|ND| kaç birimdir?



$$y+14-x=8$$

$$x-y=6$$

- 19) Şekilde [KL] ve [MK] yarım çemberlerin merkezleri çapıdır. |ML|+10=|KL|=18br, ise |KY| kaç birimdir?

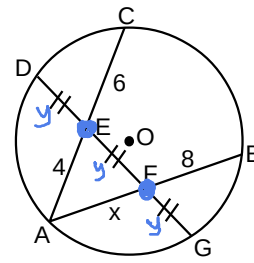


OKİD $x^2 = 8 \cdot 18 \rightarrow x = 12$

$$16ML^2 = 12^2 + 8^2 \Rightarrow 16ML = 4\sqrt{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{18} = \frac{12}{4\sqrt{13}} \rightarrow y = \frac{54}{\sqrt{13}}$$

- 20) O merkezli çemberde |DE|=|EF|=|FG| |FB|=2, |AE|=8 br |CE|=6 br olduğuna göre, |AF|=x kaç birimdir?



$$y \cdot 2y = 4 \cdot 6 = 8 \cdot x$$

$$x = 3$$