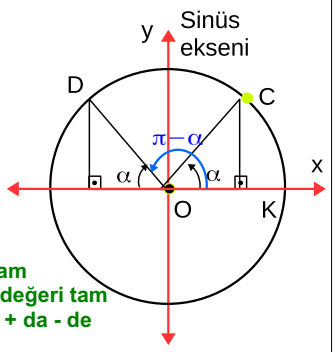
TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

İçinde bilinmeyenin trigonometrik fonksiyonları bulunan, bilinmeyenin bazı değerleri için doğru olan eşitliklere, trigonometrik denklem denir. Denklemi sağlayan değerlere, denklemin kökleri; köklerin oluşturduğu kümeye de çözüm kümesi denir. Çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de denklemi çözme denir.

A) $\sin(x)=\sin\alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $\pi-\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



sinx=sin α

ise k bir tam sayı olmak üzere, denklemin çözüm kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

bu materyal boyunca tam devirlerde kullanılan k değeri tam sayıdır. k öncesi işaret + da - de olabilir

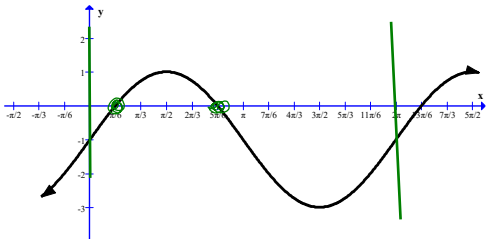
Ç={x: x= α + k.2π veya x= π − α + k.2π }

GENEL OLARAK

$$\sin(f(x))=\sin(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x)= g(x)+k.2\pi \\ f(x)=\pi-g(x)+k.2\pi \end{cases}$$

Verilen ölçü birimine göre tam devirleri 2π radyan ya da 360° seçmeyi unutmayınız.

Örnek...1 :



Grafik y=2sinx−1 fonksiyonuna aittir. Buna göre

a) Grafikten yararlanarak 2sinx−1=0 denkleminin [0,2π)aralığındaki çözüm sayısını tahmin ediniz. 2 çözüm vardır.

b) Cebirsel olarak çözümleri bulunuz.

c) Bulduğunuz çözümlerin grafik üzerindeki karşılıklarını gösteriniz.

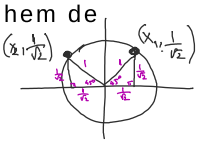
$2\sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ → $x=30^\circ$ ($\pi/6$ rad), $x=150^\circ$ ($\frac{5\pi}{6}$ rad)

www.matbaz.com

Örnek...2 :

$\sqrt{2}\sin x-1=0$ denklemini $0\le x<2\pi$ aralığında çözünüz.

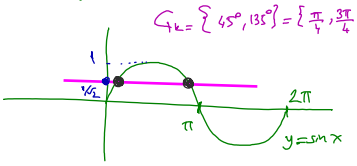
Çözümünüzü hem **birim çember** hem de **grafik yorumu** ile açıklayınız



$\sqrt{2}\sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=45^\circ+k.360^\circ$, $x=135^\circ+k.360^\circ$

$G_k=\{45^\circ,135^\circ\}=\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\}$



$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $y=\sin x$ grafiklerinin kesişimi $\sqrt{2}\sin x-1=0$ denkleminin çözümlerini verir. grafiklere göre $[0,2\pi)$ aralığında 2 çözüm vardır.

Örnek...3 :

$\sin(5x-120)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

$\sin(5x-120)=\sin 60$

$5x-120=60+k.360 \vee 5x-120=180-60+k.360 \quad (k\in\mathbb{Z})$

$x=36^\circ+k.72^\circ \vee x=48^\circ+k.72^\circ$

$G_k=\{x: x=36^\circ+k.72^\circ \vee x=48+k.72^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$

Örnek...4 :

sin(x)=−1 denkleminin (0,360) aralığında kaç farklı çözümü vardır? (Tek çözümü vardır, Birim çemberden biliyoruz)

$\sin x=\sin 270$

$x=270+k.360 \vee x=180-270+k.360 \quad k\in\mathbb{Z}$

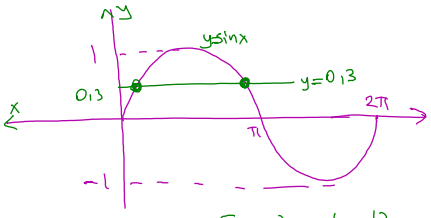
$x=270+k.360 \vee x=-90+k.360 \quad (k\in\mathbb{Z})$

İki farklı çözüm vermiş gibi görünsede çözümlerin aynı olduğunu ve belirtilen aralıkta sadece 270° nin çözüm olduğunu görüyoruz.

Örnek...5 :

sin(4x)=0,3 denkleminin (0,360) aralığında kaç farklı çözümü olduğunu grafik temsillerinden yararlanarak bulunuz.

(qr bağlantısıyla çözümünü merak ettiğiniz denklemleri grafiksel yolla inceleyebilirsiniz)



$y=\sin x$ ve $y=0,3$ $[0,2\pi)$ aralığında 2 çözüme sahiptir. $y=\sin 4x$ çizilirken $y=\sin x$ yatayda 4 kat sıkıştırılacağından $4\times 2=8$ kök elde edilir.

Örnek...6 :

$\sin(2x+40)=-\sin x = \sin(-x)$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

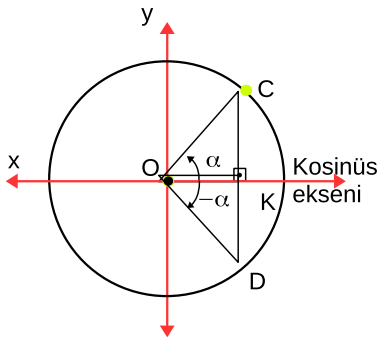
$2x+40=-x+k.360 \quad \vee \quad 2x+40=180-(-x)+k.360 \quad (k\in\mathbb{Z})$

$x=\frac{-40}{3}+k.120 \quad \vee \quad x=140+k.360$

$G_k=\{x: x=\frac{-40}{3}+k.120 \vee x=140+k.360, k\in\mathbb{Z}\}$

B) $\cos(x)=\cos\alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $-\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



cosx=cos α ise k bir tam sayı olmak üzere, denklemin çözüm kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

Ç={x: x= α + k.2π veya x= −α + k.2π }

www.matbaz.com

GENEL OLARAK

$\cos(f(x))=\cos(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x)=g(x)+k.2\pi \\ f(x)=-g(x)+k.2\pi \end{cases}$

Örnek...7 :

$0\le x<2\pi$ olmak üzere $\cos(2x)=1/2$

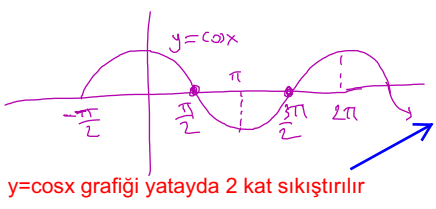
Ardından çözümleri grafikte gösteriniz.

$\cos 2x=\frac{1}{2}=\cos 60 \rightarrow 2x=60+k.360 \quad k\in\mathbb{Z}$

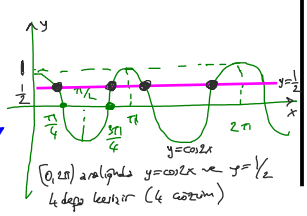
$2x=-60+k.360$

$x=30+k.180 \quad \vee \quad x=-30+k.180 \Rightarrow G_k=\{30,210,150,330\}$

$G_k=\{\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\}$



y=cosx grafiği yatayda 2 kat sıkıştırılır



Örnek...8 :

$\cos(2x+40)=\frac{-\sqrt{3}}{2}=\cos 150$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz

$2x+40=150 \mp k.360 \quad \vee \quad 2x+40=-150 \mp k.360 \quad k\in\mathbb{Z}$

$x=55 \mp k.180 \quad \vee \quad x=-95 \mp k.180$

$G_k=\{x: x=55 \mp k.180 \vee x=-95 \mp k.180, k\in\mathbb{Z}\}$

Örnek...9 :

$\cos(4x-60)=\cos(2x)$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$4x-60=2x \mp k.360 \quad \vee \quad 4x-60=-2x \mp k.360 \quad k\in\mathbb{Z}$

$x=30 \mp k.180 \quad \vee \quad x=10 \mp k.60 \quad k\in\mathbb{Z}$

$G_k=\{x: x=30 \mp k.180 \vee x=10 \mp k.60, k\in\mathbb{Z}\}$

Örnek...10 :

$\sin(6x-40)=\cos(2x+20)$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$\cos(90-(6x-40))=\cos(2x+20)$

$\cos(130-6x)=\cos(2x+20)$

$130-6x=2x+20 \mp k.360 \quad \vee \quad 130-6x=-2x-20 \mp k.360, k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{55}{4} \mp k.45° \quad \vee \quad x=\frac{75}{2} \mp k.90 \quad k\in\mathbb{Z}$

$G_k=\{x: \frac{55}{4} \mp k.45 \vee x=\frac{75}{2} \mp k.90, k\in\mathbb{Z}\}$

Örnek...11 :

$\cos(4x)=\sin 2x+0,4$

denkleminin (0,360) aralığında kaç farklı çözümü olduğunu grafik temsillerinden yararlanarak bulunuz.

8 çözüm vardır

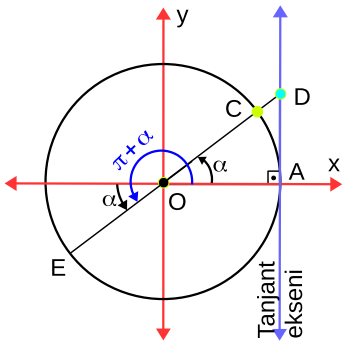


C) tan(x)=tanα DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, π+α radyanlık yayın bitim noktası E olsun. x=1 doğrusuna tanjant ekseni dendiğini öğrenmiştik. Orijinden ve C (ve E) noktasından geçen doğrunun tanjant eksenini kestiği nokta D olsun. İnceleyiniz.

tanx=tan α

ise k bir tam sayı olmak üzere



Ç={x: x= α + k.π }

GENEL OLARAK

tan(f(x))=tan(g(x))→f(x)= g(x)+k.π

Örnek...12 :

tan(x)= √3

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

tanx= tan60 ⇒ x= 60+k.180°

Ç_k= { x: x= 60+k.180 , k∈ ℤ }

Örnek...13 :

0≤x<2π aralığında tan(x−π/4)=1 denklemini çözünüz.

Çözümden hareketle tan(x−α)=1 denklemine ilişkin genel çözümü yazınız.

tan(x−π/4)= tan π/4 ⇒ x−π/4 = π/4 + kπ ⇒ x= π/2 + kπ

Ç_k= { π/2 , 3π/2 } (verilen aralıkta)

tan(x−α)= tan45 ⇒ x−α=45°+k.180° ⇒ x= α+45°+k.180°

Örnek...14 :

tan(5x−20°)=tan(3x+30°)

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

5x−20 = 3x+30 +k.180 ⇒ 2x= 50 +k.180

x= 25+k.90

Ç_k= { x: x= 25+k.90 , k∈ ℤ }

www.matbaz.com

Örnek...15 :

k bir gerçek sayı olmak üzere tan(x)=k denkleminin (-10π,21π) aralığında çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

tanx fonksiyonun periyodu π ve boşu π olan aralıkta tanx=k denkleminin tek çözümü vardır. (Bir periyotta tanx 1-1 oluyordu) (−10π,21π) aralığında 31 periyot olduğundan ,31 çözüm vardır.

D) cot(x)=cotα DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

cotx=cot α ise k bir tam sayı olmak üzere

Ç={x: x= α + k.π }

GENEL OLARAK

cot(f(x))=cot(g(x))→f(x)= g(x)+k.π

Örnek...16 :

cot(3x)=−1 denkleminin çözüm kümesini bulunuz

cot3x= cot 135 ⇒ 3x= 135+k.180

x= 45°+k.60°

Ç_k= { x: x= 45°+k.60° , k∈ ℤ }

Örnek...17 :

Cot(3x)=tan(2x) denkleminin çözüm kümesini bulunuz

cot(3x) = cot(90−2x)

3x= 90−2x+k.180 ⇒ x= 18°+k.36°

Ç_k= { x: x= 18+k.36 , k∈ ℤ }

Örnek...18 :

Cot(3x)·tan(2x)=1 denkleminin çözüm kümesini bulunuz

cot 3x = 1/tan2x = cot2x (cot3x≠0 ∧ tan2x≠0)

3x= 2x + k.180 ⇒ x= k.180 ⇒ Ç_k= ∅

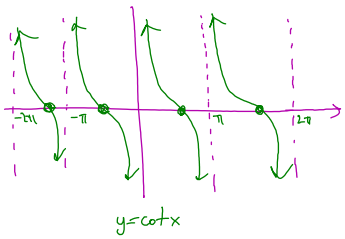
denklem çözümünde x=k.180 (k tamsayı) gibi çözümler görünse de 180 katları için orijinal eşitliğin sağlanmadığına dikkat ediniz

Örnek...19 :

f(x)=2Cot(3x)+4 fonksiyonunun (-2π,2π) arasında sıfırlarının sayısını grafik temsilinden yararlanarak bulunuz.

y= cotx grafiği

A1 yatayda 3 kat sıkıştırılır
A2 dikeyde 2 kat gerilir
A3 4 br yukarı ötelenir



y=cotx

grafiğin yatayda 3 kat sıkıştırılırsa kök sayısı 3.4= 12 ye çıkar
(A2 ve A3 uygulanması kök sayısını değiştirmez)

Örnek...20 :

Bir rüzgâr türbininin ürettiği alternatif akımın gerilimi
V(t)=220sin(100πt)
fonksiyonu ile modellenmektedir.
Burada t saniye, V volt cinsindendir.

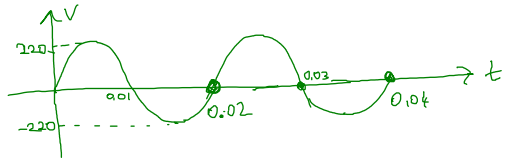
Sorular

a) Fonksiyonun genliğini ve periyodunu belirleyiniz.
b) İlk 0,04 saniyelik grafiğini çiziniz.
c) Gerilimin ilk kez **110 volt** olduğu zamanı bulunuz.
d) Bulduğunuz sonucu grafik üzerinde gösteriniz.
e) Gerilimin neden negatif değerler alabildiğini fiziksel olarak açıklayınız.

a) Genlik= 220 $(V_{max} = 220 \;,\; V_{min} = -220)$

$$T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ sn}$$

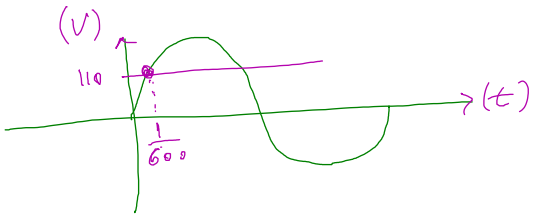
b)



c)

$$220 \sin(100\pi t) = 110$$
$$\sin(100\pi t) = 1/2 = \sin\frac{\pi}{6}$$
$$100\pi t = \frac{\pi}{6} \qquad t = \frac{1}{600}$$

d)



e) Gerilimin Negatif Değerler Almasının Fiziksel Açıklaması Alternatif akımda (AC) negatif gerilim, voltajın yok olduğu veya enerjinin kaybolduğu anlamına gelmez.

Akımın Yönü: Şebekeye verilen akım sürekli yön değiştirir. Pozitif gerilim elektrik yüklerinin (elektronların) bir yönde aktığını, negatif gerilim ise elektrik akımının ve gerilim kutuplarının tam ters yönde aktığını gösterir.

Sinüzoidal Yapı: Rüzgâr türbininin jeneratöründeki bobinler manyetik alan içinde dönerek hareket eder. Bobinin manyetik akıyı kesme açısı 360 derece döndükçe akımın yönü ve büyüklüğü sinüs eğrisi şeklinde bir pozitif bir negatif tarafa geçer.

↓

bilgi #gemini ai

www.matbaz.com