TRİGONOMETRİK REFERANS FONKSİYONLARINDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLAR

Gerçek Sayılarda Tanımlı f(x) fonksiyonundan elde edilen $g(x)=k\cdot f(mx+r)+s$ fonksiyonunun grafiği çizilirken sırasıyla

1. r birim x ekseni boyunca (yatayda) öteleme

2. m>1 için m kat sıkıştırma/daraltma (y eksenine yaklaşma)

0<m<1 için $\frac{1}{m}$ kat genişletme /germe (y ekseninden uzaklaşacak şekilde)

(m<0 için önce |m| işlemleri ve sonrasında y eksenine göre yansıma unutulmamalıdır.)

3. k>1 için k kat genişletme /germe (x ekseninden uzaklaşma)

0<k<1 için $\frac{1}{k}$ kat sıkıştırma/daraltma (x eksenine yaklaşma)

(k<0 için önce |k| işlemleri ve sonrasında x eksenine göre yansıma unutulmamalıdır.)

4. s birim y ekseni boyunca (dikeyde) öteleme dönüşümleri takip edilir.

Harflerin işaretine göre yönlere dikkat edilmelidir.

UYARI

h(x)=f(mx+r) türü bir dönüşüm iki türlü yapılabilir. (m>0 olsun)

1.yol (önce öteleme sonra öteleneni sıkıştırma)

Adım1 y=f(x) grafiği r birim sağa ya da sola ötelenir (r işaretine göre)

Adım2 Adım1 sonunda elde edilen grafiğe m kat sıkıştırma (m>1) ya da $\frac{1}{m}$ kat genişletme (0<m<1) uygulanır

2.yol(önce sıkıştırma sonra sıkıştırılanı öteleme)

Adım1 y=f(x) grafiğine önce m kat sıkıştırma ya da $\frac{1}{m}$ kat genişletme uygulanır

Adım2 Adım1 sonunda elde edilen grafik $\frac{r}{m}$ birim sağa ya da sola ötelenir

m<0 için önce |m| işlemleri ve sonrasında y eksenine göre yansıma alınır.

Örnek...1 :

y=f(x) fonksiyonunu referans alıp g(x)=f(2x+6) fonksiyonunu çizmek için

1.yol (**önce öteleme sonra öteleneni sıkıştırma**)

Adım 1 : f(x) grafiği 6 birim sola kaydırılır.

Adım 2 :Adım1 de elde edilen grafik yatayda 2 kat sıkıştırılır (Grafik üzerindeki noktaların y eksenine uzaklıkları yarıya düşürülür.

(Dikkat son durumda grafik 3 birim kaymış olur) .

2.yol (**önce sıkıştırma sonra sıkıştırılanı öteleme**)

Adım 1 : f(2x+6)=f(2(x+3)) olarak yazılabileceğinden f(x) grafiği 2 kat sıkıştırılır

Adım 2 :Adım1 de elde edilen grafik 3 birim sola kaydırılırak çizim tamamlanır.

www.matbaz.com

Örnek...2 :

f(x) referans fonksiyonundan elde edilen g(x)=3f(2x+5)−7 fonksiyonunun grafiği çizilirken hangi adımlar uygulanmalıdır?

G(X)=C·SİN(BX+A)+D TÜRÜ FONKSİYONLAR

a,b,c,d gerçek sayıları için f(x)=sinx referans fonksiyonundan türetilen g(x)=c·sin(bx+a)+d şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon elde edilirken sırasıyla yapılan işlemler ve grafiğe etki eden dönüşümler **(sol sütunda verilen öteleme ve dönüşümlerin genel yöntemler olup tüm fonksiyon türleri için geçerli olduğunu unutmayınız.)**

Özetle yazacak olursak

Adım1: x ekseni boyunca a birim öteleme

Adım 2: Bir önceki adımdaki grafiği b kat sıkıştırma ya da 1/b kat yatay genişletme

Adım 3: Bir önceki adımdaki fonksiyonu dikeyde c kat germe ya da 1/c kat sıkıştırma

Adım 4: Bir önceki adımdaki grafiği d birim y ekseni yönünde yönde öteleme

NOT: a ve d nin negatif olması durumunda yönlere dikkat edilir.
2. ve 3.adımdan önce işarete bakılmaz, sonrasında b negatifse adım 3 den önce y eksenine göre yansıma, c negatifse adım 4 öncesinde x ekseninde yansıma uygulanmalıdır. (bx+a kısmı yine tercihe göre 2 farklı şekilde yapılabilir)

Diğer trigonometrik fonksiyonların da ötelemelerle elde ediliş şekli aynıdır.
İnteraktif link1. İnteraktif link2.
(üçüncü sayfada qr mevcut.)

Örnek...3 :

g(x)=3sin(x)−5 fonksiyonunun f(x)=sinx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında

i) yapılan cebirsel işlemleri sırasıyla yazınız.
ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız.
iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

Örnek...4 :

Bir deniz fenerinin ışığı sabit hızla dönmektedir. Fenerin önündeki bir sensör, ışığın doğrultusu kuzeyi gösterdiğinde **maksimum**, güneye baktığında **minimum** ışık şiddeti ölçmektedir.
Sensörün ölçtüğü ışık şiddeti I(t) (lüks), zamana bağlı olarak periyodik değişmektedir.
Yapılan ölçümlere göre

- maksimum değer 120 lüks,
- minimum değer 40 lüks,
- bir tam dönüş 24 saniye sürmektedir.
- t=0 anında ışık şiddeti ortalama değerden artarak geçmektedir.

Buna göre:
a) Işık şiddetini modelleyen trigonometrik fonksiyonu oluşturunuz.
(Modeliniz $f(t)=a\cdot\sin(b\cdot t)+c$ formatında)
b) Fonksiyonun grafiğini çiziniz.
c) Işık şiddetinin ilk kez 100 lüks olduğu zamanı bulunuz.
d) Sonucunuzu grafik üzerinde yorumlayınız.

Örnek...5 :

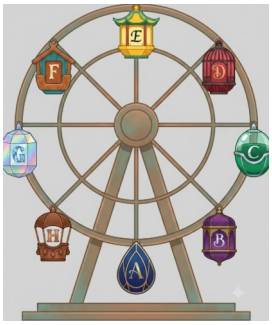
$g(x)=2\sin(4x+3)-5$ fonksiyonunun $f(x)=\sin x$ trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel işlemleri sırasıyla yazınız.

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız

iii) Grafiğini çizip, grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

www.matbaz.com

Örnek...6 :



Şekilde bir lunaparkta bulunan, 20 metre yarıçap uzunluğuna sahip ve merkezi etrafında saat yönünde dönmekte olan bir dönme dolap görülmektedir.
Dönme dolabın A kabininin yerden yüksekliğinin zamana (t saniye) bağlı değişimi, metre cinsinden;

$$f(t)=21-20\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{60}\right)$$

fonksiyonu ile modellenmektedir.
Buna göre f trigonometrik fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni (y=f(t))kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

Örnek...7 :

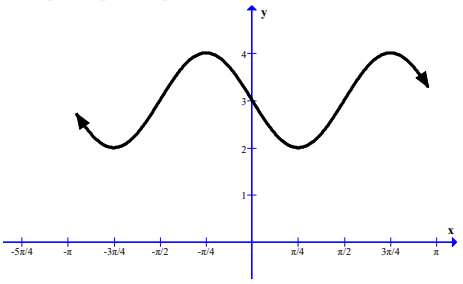
Bir lunaparktaki dönme dolabın yarıçapı 18 m, merkezi yerden 20 m yüksektedir.
Bir kabin en alttan harekete başlıyor ve dönme dolap 90 saniyede bir tur tamamlıyor.
Buna göre:
a) Kabinin yerden yüksekliğini zamana bağlı modelleyen fonksiyonu yazınız.
(Modeliniz $f(t)=a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\cdot t\right)+c$ formatında)
b) Kabinin ilk 180 saniyedeki hareket grafiğini çiziniz.
c) Kabinin yerden yüksekliğinin 29 m olduğu anları bulunuz.
d) Grafikten çözüm sayısını cebirsel çözümle karşılaştırınız.

Örnek...8 :

g(x)=c·sin(bx+a)+d fonksiyonunun (a,b,c,d pozitif sayılardır.)

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

Örnek...9 :



Grafik f(x)=sin(ax)+b fonksiyonuna aittir.

Buna göre:

a) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

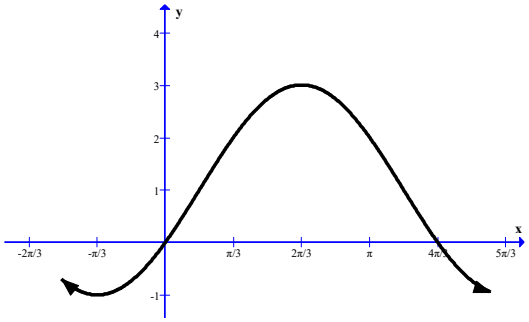
b) Periyodunu belirleyiniz.

c) Grafikten hareketle artan ve azalan olduğu aralıkları yazınız.

d) Fonksiyonun neden bire bir olmadığını grafikten açıklayınız.

e) $\frac{a}{b}$ kaçtır?

Örnek...10 :



Grafik f(x)=asin(x+b)+c fonksiyonuna aittir.

Buna göre:

a) Fonksiyonun cebirsel ifadesini yazınız.
b) Fonksiyonun görüntü kümesini yalnızca grafiği kullanarak belirleyiniz.
c) Fonksiyonun en büyük ve en küçük değerlerini cebirsel ifadeden yararlanarak ispatlayınız.
d) Grafik ile cebirsel ifadenin aynı sonucu verdiğini açıklayınız.

www.matbaz.com

Örnek...11 :

Aşağıda, bir trigonometrik fonksiyonun grafiği verilmiştir. Grafikte;

- maksimum değer 5,
- minimum değer 1,
- ardışık iki tepe noktası arasındaki uzaklık π,
- ilk tepe noktası x=π/4 noktasındadır.

a) Grafikten hareketle fonksiyonun genliğini, orta doğrusunu ve periyodunu belirleyiniz.

b) Bu grafiğe uygun bir cebirsel fonksiyon yazınız.

c) Yazdığınız fonksiyonun **y=sinx** referans fonksiyonundan hangi dönüşümler uygulanarak elde edildiğini sırasıyla açıklayınız.

Örnek...12 :

Bir kıyıda deniz seviyesi gün boyunca periyodik olarak değişmektedir.
En yüksek seviye **3,8 m**, en düşük seviye **1,2 m** olup iki ardışık en yüksek seviye arasındaki süre **12 saattir.**
Saat 00.00'da deniz seviyesi ortalama değerden yükselmeye başlamaktadır.
Buna göre:
a) Deniz seviyesini modelleyen fonksiyonu oluşturunuz.
(Modeliniz $f(t)=a\cdot\sin(b\cdot t)+c$ formatında)
b) Fonksiyonun genliğini, orta doğrusunu ve periyodunu belirleyiniz.
c) Saat 06.00'daki deniz seviyesini hesaplayınız.
d) Deniz seviyesinin ilk kez maksimum olduğu zamanı bulunuz.

Örnek...13 :

g(x)=2cos(x) −1 fonksiyonunun f(x)=cosx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel işlemleri sırasıyla yazınız.

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

www.matbaz.com

Örnek...14 :

g(x)=−3cos(2x+4) +1 fonksiyonunun f(x)=cosx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel İşlemleri sırasıyla yazınız.

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire−birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

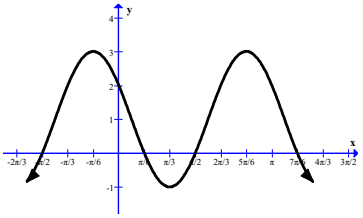
Örnek...15 :

Bir bisiklet pedalının merkezden yüksekliği zamanla sinüzoidal (sinüs ya da kosinüs fonksiyonları türünden modele sahip) olarak değişmektedir.
Bir sensörden elde edilen grafik incelendiğinde;

- maksimum yükseklik 42 cm,
- minimum yükseklik 18 cm,
- bir tam pedal turu 1,5 saniye sürmektedir.
- t=0 anında pedal en üst noktadadır.

Buna göre:
a) Grafiğe uygun trigonometrik fonksiyonu yazınız.
b) Referans fonksiyondan hangi dönüşümler uygulanmıştır?
c) Pedalın ilk kez 30 cm yüksekliğe indiği zamanı bulunuz.
d) Modelin gerçek yaşamı temsil etmede yeterli olup olmadığını tartışınız.

Örnek...16 :



Grafik f(x)=kcos(ax+b)+c fonksiyonuna aittir.

Buna göre:

a) Fonksiyonun genliğini, orta doğrusunu ve periyodunu belirleyiniz.

b) Grafikten yararlanarak maksimum ve minimum değerlerini yazınız.

c) Fonksiyonun cebirsel ifadesini bulunuz.

d) Referans fonksiyonundan hangi dönüşümlerle elde edildiğini açıklayınız.

Örnek...17 :

" $\forall x \in \mathbb{R}$, f(x)=cos4x fonksiyonunun [0,2π) nda 8 tane kökü vardır." önermesini cebirsel olarak ispatlayınız.

Örnek...18 :

" $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5\cdot\cos 4x-3$ fonksiyonunun görüntü kümesi [−8,2] olur. "

a) Birim çember üzerindeki x−koordinatı (kosinüs ekseni) sınırlarından ve grafiksel dönüşümlerden (genlik değişimi ve dikey öteleme) yararlanarak bu durumun gerekçesini açıklayınız.
b) Mantık bağlaçları ve niceleyicilerden yararlanarak cebirsel yolla bulunuz.

www.matbaz.com

Örnek...19 :

g(x)= tan(2x) fonksiyonunun f(x)=tanx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel işlemleri sırasıyla yazınız.

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

Örnek...20 :

g(x)= 3tan(x+4) +5 fonksiyonunun f(x)=tanx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel İşlemleri sırasıyla yazınız.

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

Örnek...21 :

g(x)=c.tan(bx+a)+d fonksiyonunun (a,b,c,d pozitif sayılardır.)
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

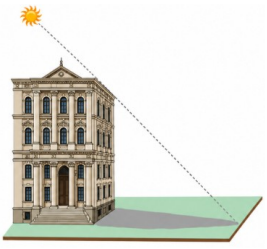
Örnek...22 :

g(x)=3.tan(2x+1)−4 fonksiyonunun aşağıdaki nitel özelliklerini cebirsel yollarla bularak belirtiniz

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

www.matbaz.com

Örnek...23 :



Yanda bir binanın öğle vaktindeki görseli verilmiştir. Binanın 12.00 ile 15.00 arasında ($t \in [12, 15)$) oluşan gölge boyunun (m) zamana bağlı (sa.) değişimi,

$$f(t)=\tan\left(\frac{\pi}{6}(t-6)\right)+30$$

şeklinde tanımlanan tanjant trigonometrik fonksiyonu ile modellenmiştir.
Buna göre, binanın gölgesinin en kısa olduğu saati ve değeri bulunuz.

Örnek...24 :

Uygun tanım ve değer kümesine sahip f(x)=cotx trigonometrik referans fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen 3cot(2x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek...25 :

Uygun tanım ve değer kümesine sahip f(x)=cotx trigonometrik referans fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen $f(x)=2\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek...26 :

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x)=\cot x$ trigonometrik referans fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen $\frac{1}{3}\cot(2x+\frac{\pi}{4})-5$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek...27 :

$g(x)=\sqrt{3}\cot(x)+2$ fonksiyonunun aşağıdaki nitel özelliklerini cebirsel yollarla bularak belirtiniz. Grafiğini çiziniz

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu
belirtiniz.

www.matbaz.com

Örnek...28 :

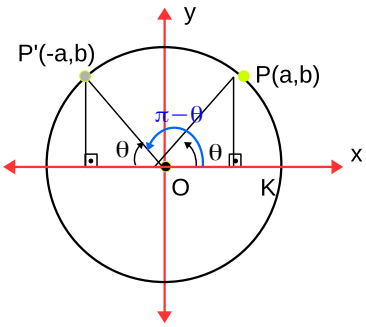
Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x)=\sin(x+\pi)$ ve $g(x)=-\sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonların grafik temsillerini kullanarak $f(x)=g(x)$ eşitliğini doğrulayınız.

Örnek...29 :

Şekli inceleyiniz. Birim çemberde standart biçimde ve ölçüsü θ radyan olan bir dar açı alalım. Bu açının gördüğü yayın bitim noktasının koordinatı P(a,b) olsun. Buna göre,

$\pi-\theta$ ve $\frac{3\pi}{2}-\theta$

türündeki açıların trigonometrik oranlarını θ cinsinden hesaplayınız



Örnek...30 :

Örnek 21 deki düşünme şeklini kullanarak ölçüsü $\left(\frac{\pi}{2}\mp\theta\right)$ / $(\pi\pm\theta)$ / $\left(\frac{3\pi}{2}\mp\theta\right)$ / $(2\pi-\theta)$ olarak verilen ifadelerde π sadeleştirilmesi için genellemeler elde ediniz.

www.matbaz.com

Örnek...31 :

Trigonometrik bir referans fonksiyon seçiniz. Gerçek yaşama ait bir periyodik olayı (salıncak, gölge, ses dalgası, dönme dolabı) bu fonksiyonla modelleyiniz. Modelinizi tablo, grafik ve cebirsel temsil ile sununuz. Varsayımlarınızı, genellemelerinizi ve modelin sınırlılıklarını gerekçelendiriniz.

DERECELİ PUANLAMA ANAHTARI

Boyut	4 (Mükemmel)	3 (İyi)	2 (Gelişmekte)	1 (Başlangıç)
Temsil Geçişleri	Tüm temsiller (sözel, tablo, grafik, cebir) tutarlı ve birbirini destekler.	En az 3 temsil tutarlı.	2 temsil arasında geçiş var, tutarsızlık var.	Sadece 1 temsil kullanılmış.
Varsayım/ Genelleme	Varsayımlar veriye dayalı, genelleme gerekçeli.	Varsayımlar var, genelleme zayıf gerekçeli.	Varsayımlar tahmin düzeyinde.	Hazır formül ezberlenmiş.
Gerçek Yaşam Bağlamı	Model gerçekçi, sınırlılıklar tartışılmış.	Model gerçekçi ama sınırlılıklar yok.	Model yüzeysel.	Bağlam yok veya uydurma.
İspat/ Doğrulama	Cebirsel ve grafiksel doğrulama birlikte yapılmış.	Sadece bir yöntemle doğrulama.	Doğrulama eksik.	Doğrulama yok.
İletişim ve İş Birliği	Sözel sunum matematiksel dil kullanır, arkadaşları dinler.	Sunum anlaşılır, eksikler var.	Sunum karışık.	Katılım yok.

www.matbaz.com

ÖZ DEĞERLENDİRME FORMU (ÖĞRENCİ)

“Bu çalışmada hangi varsayımlarımın doğru çıktığını, hangilerinin yanlış çıktığını nasıl anladım?”

“Modelimi başka bir gerçek yaşam olayına uygulayabilir miyim? Hangi değişiklikleri yapmalıyım?”