TRİGONOMETRİK REFERANS FONKSİYONLARINDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLAR

Gerçek Sayılarda Tanımlı f(x) fonksiyonundan elde edilen $g(x)=k\cdot f(mx+r)+s$ fonksiyonunun grafiği çizilirken sırasıyla

1. r birim x ekseni boyunca (yatayda) öteleme

2. m>1 için m kat sıkıştırma/daraltma (y eksenine yaklaşma)

0<m<1 için $\frac{1}{m}$ kat genişletme /germe (y ekseninden uzaklaşacak şekilde)

(m<0 için önce |m| işlemleri ve sonrasında y eksenine göre yansıma unutulmamalıdır.)

3. k>1 için k kat genişletme /germe (x ekseninden uzaklaşma)

0<k<1 için $\frac{1}{k}$ kat sıkıştırma/daraltma (x eksenine yaklaşma)

(k<0 için önce |k| işlemleri ve sonrasında x eksenine göre yansıma unutulmamalıdır.)

4. s birim y ekseni boyunca (dikeyde) öteleme dönüşümleri takip edilir.

Harflerin işaretine göre yönlere dikkat edilmelidir.

UYARI

h(x)=f(mx+r) türü bir dönüşüm iki türlü yapılabilir. (m>0 olsun)

1.yol (önce öteleme sonra öteleneni sıkıştırma)

Adım1 y=f(x) grafiği r birim sağa ya da sola ötelenir (r işaretine göre)

Adım2 Adım1 sonunda elde edilen grafiğe m kat sıkıştırma (m>1) ya da $\frac{1}{m}$ kat genişletme (0<m<1) uygulanır

2.yol(önce sıkıştırma sonra sıkıştırılanı öteleme)

Adım1 y=f(x) grafiğine önce m kat sıkıştırma ya da $\frac{1}{m}$ kat genişletme uygulanır

Adım2 Adım1 sonunda elde edilen grafik $\frac{r}{m}$ birim sağa ya da sola ötelenir

m<0 için önce |m| işlemleri ve sonrasında y eksenine göre yansıma alınır.

Örnek...1 :

y=f(x) fonksiyonunu referans alıp g(x)=f(2x+6) fonksiyonunu çizmek için

1.yol (**önce öteleme sonra öteleneni sıkıştırma**)

Adım 1 : f(x) grafiği 6 birim sola kaydırılır.

Adım 2 :Adım1 de elde edilen grafik yatayda 2 kat sıkıştırılır (Grafik üzerindeki noktaların y eksenine uzaklıkları yarıya düşürülür.

(Dikkat son durumda grafik 3 birim kaymış olur) .

2.yol (önce sıkıştırma sonra sıkıştırılanı öteleme)

Adım 1 : f(2x+6)=f(2(x+3)) olarak yazılabileceğinden f(x) grafiği 2 kat sıkıştırılır

Adım 2 :Adım1 de elde edilen grafik 3 birim sola kaydırılırak çizim tamamlanır.

www.matbaz.com

Örnek...2 :

f(x) referans fonksiyonundan elde edilen $g(x)=3f(2x+5)-7$ fonksiyonunun grafiği çizilirken hangi adımlar uygulanmalıdır?

G(X)=C·SİN(BX+A)+D TÜRÜ FONKSİYONLAR

a,b,c,d gerçek sayıları için f(x)=sinx referans fonksiyonundan türetilen $g(x)=c\cdot\sin(bx+a)+d$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon elde edilirken sırasıyla yapılan işlemler ve grafiğe etki eden dönüşümler **(sol sütunda verilen ötelemelerle elde etme işlemleri tüm fonksiyonlar için geçerlidir)**

Özetle yazacak olursak

Adım1: x ekseni boyunca a birim öteleme

Adım 2: Bir önceki adımdaki grafiği b kat sıkıştırma ya da 1/b kat yatay genişletme

Adım 3: Bir önceki adımdaki fonksiyonu dikeyde c kat germe ya da 1/c kat sıkıştırma

Adım 4: Bir önceki adımdaki grafiği d birim y ekseni yönünde yönde öteleme

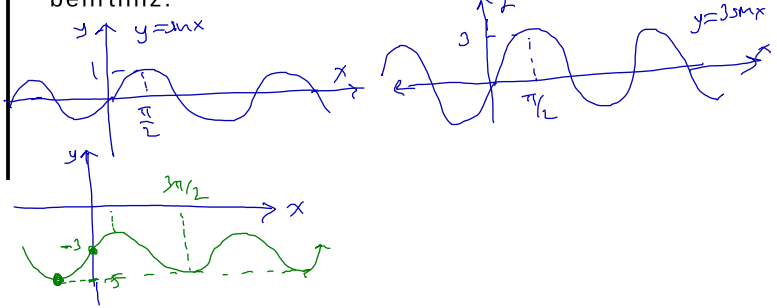
NOT: a ve d nin negatif olması durumunda yönlere dikkat edilir.
2. ve 3.adımda önce yani işarete bakılmaz, sonrasında b negatifse adım 3 den önce y eksenine göre yansıma, c negatifse adım 4 öncesinde x ekseninde yansıma uygulanmalıdır. (bx+a kısmı da tercihe göre 2 farklı şekilde yapılabilir)

Diğer trigonometrik fonksiyonların da ötelemelerle elde ediliş şekli aynıdır.
İnteraktif link. (üçüncü sayfada qr mevcut.)

Örnek...3 :

g(x)=3sin(x)−5 fonksiyonunun f(x)=sinx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında

i) yapılan cebirsel işlemleri sırasıyla yazınız.
ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız.
iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu belirtiniz.



Örnek...4 :

Bir deniz fenerinin ışığı sabit hızla dönmektedir. Fenerin önündeki bir sensör, ışığın doğrultusu kuzeyi gösterdiğinde **maksimum**, güneye baktığında **minimum** ışık şiddeti ölçmektedir.
Sensörün ölçtüğü ışık şiddeti (f(t)=asin(bt)+c modeliyle (lüks), zamana bağlı olarak periyodik değişmektedir. Yapılan ölçümlere göre

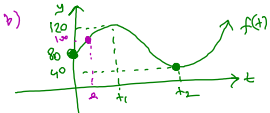
- maksimum değer 120 lüks,
- minimum değer 40 lüks,
- bir tam dönüş 24 saniye sürmektedir.
- t=0 anında ışık şiddeti ortalama (T=24) değerden artarak geçmektedir.

Buna göre:
a) Işık şiddetini modelleyen trigonometrik fonksiyonu oluşturunuz.
b) Fonksiyonun grafiğini çiziniz.
c) Işık şiddetinin ilk kez 100 lüks olduğu zamanı bulunuz.
d) Sonucunuzu grafik üzerinde yorumlayınız.

$f(t)=a\sin bt+c$ $\quad T=\frac{2\pi}{b}=24 \quad b=\frac{\pi}{12}$

$c+a=120$, $c-a=40$ $\Rightarrow$ $c=80$, $a=40$

$y=f(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)+80$



b) $f(t)=40\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)+80$

c) $100=40\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)+80 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi t}{12}=\frac{\pi}{6}$ $\quad t=2''$

d) Işık şiddeti 80 lüks ile başlar 2. saniyede ilk defa 100 olur. periyot 24 saniyedir.

Örnek...5 :

$g(x)=2\sin(4x+3)-5$ fonksiyonunun $f(x)=\sin x$ trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel İşlemleri sırasıyla yazınız.
bağımsız değişkeni 4 ile çarpıp 3 ekleme, elde edilen reel sayının sinüsünü bulup 2 ile çarpma ve sonuçtan 5 çıkarma

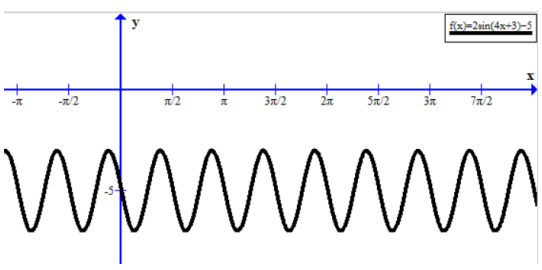
ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız
$y=\sin x$ (A1) 3 birim sola öteler (A2) yatmada 4 kat sıkıştırır (A3) dikeyde 2 kat gerer (A4) son adımda 5 birim aşağıya öteler.

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri $\mathbb{R} \to [-1,1]$
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını sıfırı yok, y kesimi $(0, 2\sin 3-5)$
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını → maks $(x_0,-3)$, min $(x_1,-7)$
e) İşareti dalga +
f) Bire birlik durumunu → bire-bir değil
g) Örten olma durumunu değer kümesi $[-1,1]$ kısmı örter
h) Tek/çift olma durumunu → ne tek ne çift
i) Periyodunu belirtiniz. $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=T$

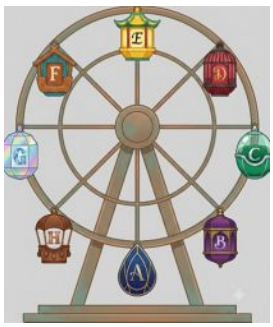
$4x_0+3=\pi/2 \Rightarrow x_0=\frac{\frac{\pi}{2}-3}{4}$

$4x_1+3=3\pi/2 \Rightarrow x_1=\frac{\frac{3\pi}{2}-3}{4}$

Grafik periyodik olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ alınırsa sonuç tane sıfırı, maksimum ya da minimum değeri olacaktır.



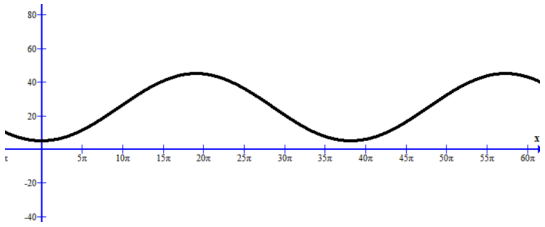
Örnek...6 :



Şekilde bir lunaparkta bulunan, 20 metre yarıçap uzunluğuna sahip ve merkezi etrafında saat yönünde dönmekte olan bir dönme dolap görülmektedir.
Dönme dolabın A kabininin yerden yüksekliğinin zamana (t saniye) bağlı değişimi, metre cinsinden;

$$f(t)=21-20\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{60}\right)$$

fonksiyonu ile modellenmektedir.
Buna göre f trigonometrik fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri Tk $[0,\infty)$ Gk $[1,41]$
b) Sıfırını ve y ekseni (y=f(t))kesim noktasını sıfırı yoktur. yekseni kesimi: $t=0 \Rightarrow f(0)=1$ $(0,1)$
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını min $(0,1)$ tanım kümesinden, maks $(60,41)$ fonksiyonun mutlak max/min değeridir.
e) İşareti dalga +
f) Bire birlik durumunu 1-1 değildir.
g) Örten olma durumunu Gk $[1,41]$ kısmı örtecektir.
h) Tek/çift olma durumunu ne tek ne çift
i) Periyodunu belirtiniz. $\frac{2\pi}{\left|-\frac{\pi}{60}\right|}=120''$



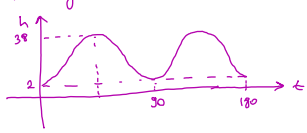
Örnek...7 :

Bir lunaparktaki dönme dolabın yarıçapı 18 m, merkezi yerden 20 m yüksektedir.
Bir kabin en alttan harekete başlıyor ve dönme dolap 90 saniyede bir tur tamamlıyor. $T=90 \quad \frac{2\pi}{|b|}=90 \quad |b|=\frac{\pi}{45}$
Buna göre:
a) Kabinin yerden yüksekliğini zamana bağlı modelleyen fonksiyonu yazınız.
b) Kabinin ilk 180 saniyedeki hareket grafiğini çiziniz.
c) Kabinin yerden yüksekliğinin 29 m olduğu anları bulunuz.
d) Grafikten çözüm sayısını cebirsel çözümle karşılaştırınız.

$f(t)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{45}\right)+c$ $\quad a+c=38,\ c-a=2 \Rightarrow c=20,\ a=18$

$f(t)=-18\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{45}\right)+20$ $\quad (t=0$ anında en alt için $a=-18$ alındı)

b) 180 saniyede dönme dolap 2 tam tur yapar



c) $-18\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{45}\right)+20=29 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{45}\right)=-\frac{1}{2}$

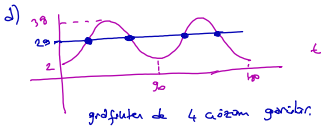
$\cos\frac{\pi t}{45}=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}$

$t_1=30 \quad t_2=60$

$t=30+90k \quad t=60+90k \quad (k\in\mathbb{Z})$

30, 120, 60, 150

4 kök



grafikten de 4 çözüm görülür.

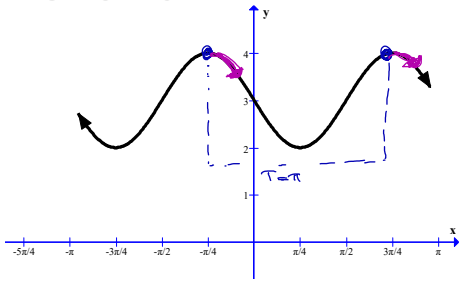
www.matbaz.com

Örnek...8 :

g(x)=c·sin(bx+a)+d fonksiyonunun (a,b,c,d pozitif sayılardır.)

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu belirtiniz.

Örnek...9 :



Grafik f(x)=sin(ax)+b fonksiyonuna aittir.

Buna göre:

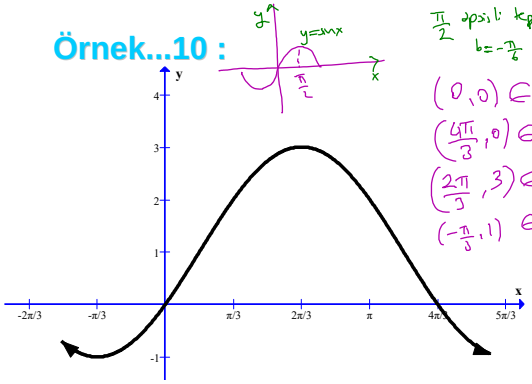
a) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

b) Periyodunu belirleyiniz.

c) Grafikten hareketle artan ve azalan olduğu aralıkları yazınız.

d) Fonksiyonun neden bire bir olmadığını grafikten açıklayınız.

Örnek...10 :



Grafik f(x)=asin(x+b)+c fonksiyonuna aittir.

Buna göre:

a) Fonksiyonun cebirsel ifadesini yazınız.
b) Fonksiyonun görüntü kümesini yalnızca grafiği kullanarak belirleyiniz.
c) Fonksiyonun en büyük ve en küçük değerlerini cebirsel ifadeden yararlanarak ispatlayınız.
d) Grafik ile cebirsel ifadenin aynı sonucu verdiğini açıklayınız.

Örnek...11 :

Aşağıda, bir trigonometrik fonksiyonun grafiği verilmiştir. Grafikte;

- maksimum değer 5,
- minimum değer 1,
- ardışık iki tepe noktası arasındaki uzaklık π,
- ilk tepe noktası x=π/4 noktasındadır.

a) Grafikten hareketle fonksiyonun genliğini, orta doğrusunu ve periyodunu belirleyiniz.

b) Bu grafiğe uygun bir cebirsel fonksiyon yazınız.

c) Yazdığınız fonksiyonun **y=sinx** referans fonksiyonundan hangi dönüşümler uygulanarak elde edildiğini sırasıyla açıklayınız.

www.matbaz.com

Örnek...12 :

Bir kıyıda deniz seviyesi gün boyunca periyodik olarak değişmektedir. En yüksek seviye **3,8 m**, en düşük seviye **1,2 m** olup iki ardışık en yüksek seviye arasındaki süre **12 saattir.** Saat 00.00'da deniz seviyesi ortalama değerden yükselmeye başlamaktadır.
Buna göre:
a) Deniz seviyesini modelleyen fonksiyonu oluşturunuz.
b) Fonksiyonun genliğini, orta doğrusunu ve periyodunu belirleyiniz.
c) Saat 06.00'daki deniz seviyesini hesaplayınız.
d) Deniz seviyesinin ilk kez maks olduğu zamanı bulunuz.

a) $f(t)=a\sin(bt)+c \Rightarrow T=12=\frac{2\pi}{b} \Rightarrow b=\pi/6$

$3,8=a+c$
$1,2=c-a$ $\Rightarrow c=2,5 \quad a=1,3$

$f(t)=1,3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)+2,5$

b) genlik $=a=1,3$ orta doğru $\frac{\text{maks}+\text{min}}{2}=\frac{3,8+1,2}{2}=\frac{5}{2}$

periyot $=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{\pi/6}=12$

c) saat 06 da $f(6)=2,5+1,3\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right) \Rightarrow f(6)=2,5$ (0)

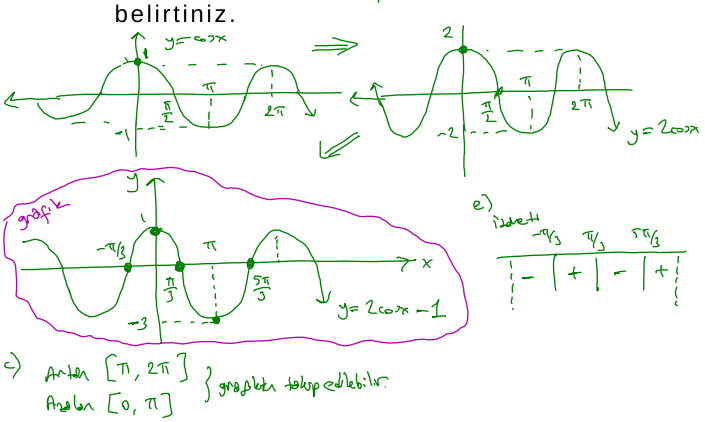
d) $3,8=2,5+1,3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)=1=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=3$

Örnek...13 :

g(x)=2cos(x) −1 fonksiyonunun f(x)=cosx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel işlemleri sırasıyla yazınız.
bağımsız değişkenin katsayı değerini 2 ile çarpma, elde edilen değerden 1 çıkarma.
ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız
y=cosx grafiği (A1) dikeyde 2 kat gerilir (A2) 1 br aşağı ötelenir.

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri TK=IR G.K.=[−3,1]
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını $\left(\frac{\pi}{3},0\right),\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$ (0,1)
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını $(\pi,-3)$ min $(0,1)$ maks
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu birebir değil
g) Örten olma durumunu R→[−3,1] örten
h) Tek/çift olma durumunu → $f(-x)=f(x)$ olduğundan çifttir
i) Periyodunu $T=2\pi$
belirtiniz.



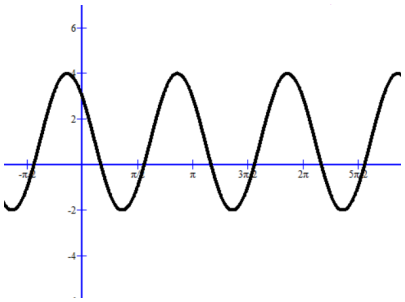
c) Artan $[\pi,2\pi]$ Azalan $[0,\pi]$ } grafikten takip edilebilir.

Örnek...14 :

g(x)=−3cos(2x+4) +1 fonksiyonunun f(x)=cosx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında
i) yapılan cebirsel İşlemleri sırasıyla yazınız.
bağımsız değişkenin 2 katını alıp 4 ekleme elde edilen sayının kosinüsünü bulup −3 ile çarpıp 1 ekleme

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız
y=cosx grafiği (A1) 4 br sola ötelenir (A2) yatayda 2 kat sıkıştırılır (A3) dikeyde 3 kat gerilir (A4) Ox ekseni göre katlanır (yansıma alınır) (A5) 1 br yukarı ötelenir.

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri TK=IR G.K.=[−2,4]
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını $\cos(2x+4)=\frac{1}{3}$ sağlayan x'ler için 0°, verdir. $(0,1-3\cos 4)$ → y ekseni kesim noktası
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını maks $(x_0,4)$ min $(x_1,-2)$
e) İşareti
f) Bire−birlik durumunu birebir değil
g) Örten olma durumunu IR→[−2,4] için örtendir
h) Tek/çift olma durumunu → ne tek ne çift
i) Periyodunu $T=\pi$
belirtiniz.



Örnek...15 :

Bir bisiklet pedalının merkezden yüksekliği zamanla sinüzoidal olarak değişmektedir. Bir sensörden elde edilen grafik incelendiğinde;

- maksimum yükseklik 42 cm, maks 42
- minimum yükseklik 18 cm, min 18
- bir tam pedal turu 1,5 saniye sürmektedir. $T=1,5$
- t=0 anında pedal en üst noktadadır.

Buna göre:
a) Grafiğe uygun trigonometrik fonksiyonu yazınız.
b) Referans fonksiyondan hangi dönüşümler uygulanmıştır?
c) Pedalın ilk kez 30 cm yüksekliğe indiği zamanı bulunuz.
d) Modelin gerçek yaşamı temsil etmede yeterli olup olmadığını tartışınız.

a) t=0 anında pedal en üst noktadayken model kosinüs fonksiyonuyla yazılabilir.

$y=a\cos bt+c \quad \frac{2\pi}{b}=1,5 \Rightarrow b=\frac{4\pi}{3}$

$a+c=42$
$c-a=18$ $\Rightarrow a=12, \quad c=30$

$y=f(t)=12\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)+30$ (verilerle uyumlu model/fonksiyon)

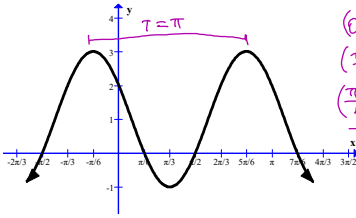
b) $y=\cos t$ referans fonksiyonu yatayda $\frac{1}{4\pi/3}=\frac{3}{4\pi}$ kat sıkıştırılmıştır. Dikeyde 12 kat gerilmiş ve son olarak 30 br yukarı yönde ötelenmiştir.

c) $h=30 \Rightarrow 30=12\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)+30 \Rightarrow \frac{4\pi t}{3}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{3}{8}$

d) Bu model, pedalın yüksekliğinin zamana bağlı değişimini matematiksel olarak açıklamak için yeterlidir. Ancak gerçek yaşamın bütün ayrıntılarını temsil etmez.odelin varsayımları: - Pedal sabit açısal hızla dönmektedir. - Pedalın dönme ekseni sabittir.
- Pedalın dönme yarıçapı değişmemektedir.
- Sensör ölçümlerinde hata olmadığı kabul edilmektedir.
Gerçek yaşamda bisikletlinin pedal çevirme hızı değişebilir ve sensör ölçümlerinde küçük hatalar oluşabilir.

www.matbaz.com

Örnek...16 :



Grafik f(x)=kcos(ax+b)+c fonksiyonuna aittir.

Buna göre:

a) Fonksiyonun genliğini, orta doğrusunu ve periyodunu belirleyiniz.

b) Grafikten yararlanarak maksimum ve minimum değerlerini yazınız.

c) Fonksiyonun cebirsel ifadesini bulunuz.

d) Referans fonksiyonundan hangi dönüşümlerle elde edildiğini açıklayınız.

Örnek...17 :

" $\forall x \in \mathbb{R}$, f(x)=cos4x fonksiyonunun [0,2π) nda 8 tane kökü vardır." önermesini cebirsel olarak ispatlayınız.

Örnek...18 :

" f(x)=5·cos4x−3 fonksiyonunun görüntü kümesi [−8,2] olur. "

a) Birim çember üzerindeki x−koordinatı (kosinüs ekseni) sınırlarından ve grafiksel dönüşümlerden (genlik değişimi ve dikey öteleme) yararlanarak bu durumun gerekçesini açıklayınız.
b) Mantık bağlaçları ve niceleyicilerden yararlanarak cebirsel yolla bulunuz.

Örnek...19 :

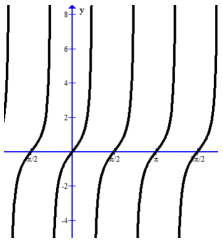
g(x)= tan(2x) fonksiyonunun f(x)=tanx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında

i) yapılan cebirsel işlemleri sırasıyla yazınız.

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız.

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu belirtiniz.



Örnek...20 :

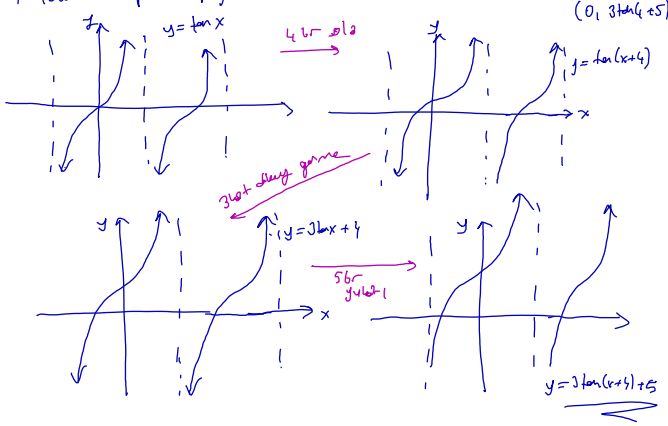
g(x)= 3tan(x+4) +5 fonksiyonunun f(x)=tanx trigonometrik referans fonksiyonundan elde edilmesi esnasında

i) yapılan cebirsel İşlemleri sırasıyla yazınız.

ii) uygulanan dönüşümleri sırasıyla yazınız

iii) Grafiğini çizip grafiğinden yola çıkarak

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu belirtiniz.



www.matbaz.com

Örnek...21 :

g(x)=c.tan(bx+a)+d fonksiyonunun (a,b,c,d pozitif sayılardır.)

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu $T=\frac{\pi}{b}$ belirtiniz.

$k\in\mathbb{Z}$

Tanımsız olduğu noktalar $bx+a=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow TK=\mathbb{R}-\left\{x: x=\frac{\frac{\pi}{2}-a}{b}+\frac{k\pi}{b}\right\}$ $GK=\mathbb{R}$

b) Sıfırı $c\tan(bx+a)+d=0$ $\tan(bx+a)=\frac{-d}{c}+k\pi$ $bx+a=\arctan\left(-\frac{d}{c}\right)$

$x=\frac{\arctan\left(\frac{-d}{c}\right)-a}{b}+\frac{k\pi}{b}$ y ekseni kesim noktası $(0, c\tan a+d)$

c) $b>0$ $c>0$ fonksiyon her bir tanımlı olduğu periyotta artandır.

d) $GK=\mathbb{R}$, maksimum ya da minimum yoktur.

e) $\tan(bx+a)>\frac{-d}{c}$, $\tan(bx+a)<\frac{-d}{c}$ durumlarına göre incelenir.

f) fonksiyon 1-1 değildir.

g) fonksiyon artandır.

h) fonksiyon ne x'e ne y'ye göre simetriktir. (tek ya da çift değildirler)

i) periyodu $T=\frac{\pi}{b}$ dir.

Örnek...22 :

g(x)=3.tan(2x+1)−4 fonksiyonunun aşağıdaki nitel özelliklerini cebirsel yollarla bularak belirtiniz

a) Tanım ve Görüntü Kümeleri
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu belirtiniz.

a) $2x+1=\frac{\pi}{2}+k\pi$ için tanımsızdır $\Rightarrow TK=\mathbb{R}-\left\{x: x=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{2}+\frac{k\pi}{2}\right\}$ $GK=\mathbb{R}$

b) $3\tan(2x+1)-4=0 \Rightarrow \tan(2x+1)=\frac{4}{3} \Rightarrow 2x+1=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+k\pi$

$x=\frac{\arctan\left(\frac{4}{3}\right)-1}{2}+\frac{k\pi}{2} \Rightarrow y=0$ (sıfırları) $(k\in\mathbb{Z})$

y ekseni kesimi için $x=0 \Rightarrow (0, 3\tan 1-4)$

c) fonksiyon tanımlı olduğu her periyot boyunca (her aralıkta ve sonsuzluk sayısı) artandır

d) maksimum ya da minimumu yoktur.

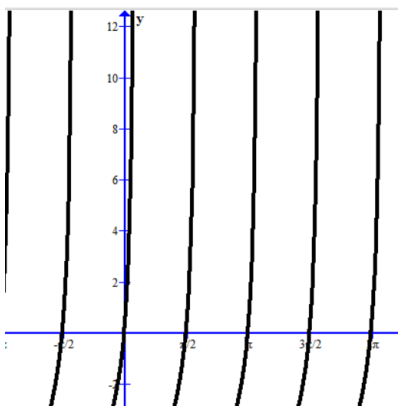
e) $\tan(2x+1)>\frac{4}{3}$ için +, $\tan(2x+1)<\frac{4}{3}$ için − değerler alır.

f) bire-bir değildir. (g(x) periyodik)

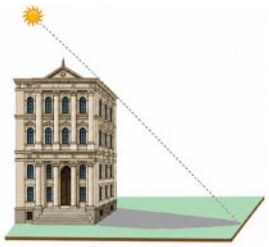
g) artandır $(GK=\mathbb{R})$

h) $g(x)\neq g(-x) \wedge g(x)\neq -g(-x)$ ne tek ne çiftir.

i) periyot $=T=\frac{\pi}{2}$



Örnek...23 :



Yanda bir binanın öğle vaktindeki görseli verilmiştir. Binanın 12.00 ile 15.00 arasında oluşan gölge boyunun (m) zamana bağlı (sa.) değişimi,

$$f(t)=\tan\left(\frac{\pi}{6}(t-6)\right)+30$$

şeklinde tanımlanan tanjant trigonometrik fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre, binanın gölgesinin en kısa olduğu saati ve değeri bulunuz.

$\frac{\pi}{6}(t-6)$ işareti ile artarken (birim bölgede) f(t) artandır.

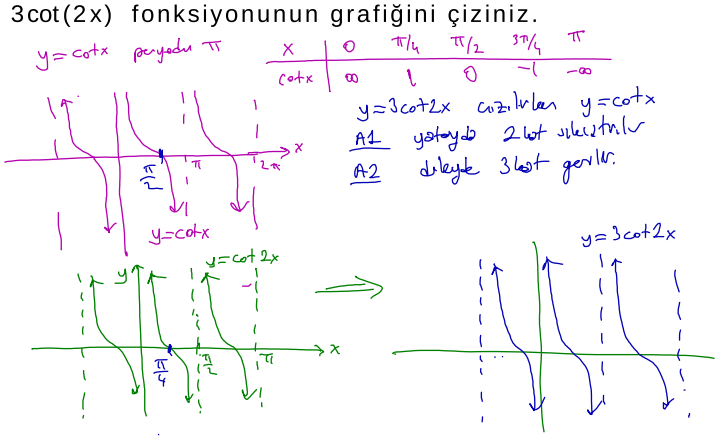
$t-6\neq 0$ $(12\leq t\leq 15)$ olduğuyla ilgili en küçük yapan $t=12$ seçeriz

$f(12)=\tan\left(\frac{\pi}{6}(12-6)\right)+30=30$m (en kısa gölge) $\rightarrow$ saat 12 gölge 30m

$f(14)=\tan\left(\frac{\pi}{6}(14-6)\right)+30=30+\sqrt{3}$ m (gölge uzuyor)

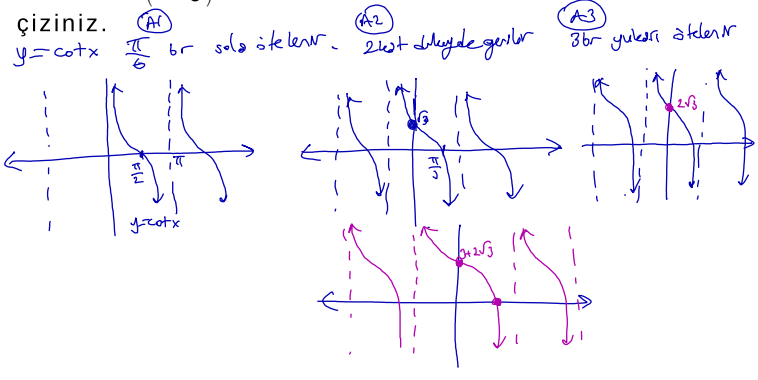
Örnek...24 :

Uygun tanım ve değer kümesine sahip f(x)=cotx trigonometrik referans fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen 3cot(2x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Örnek...25 :

Uygun tanım ve değer kümesine sahip f(x)=cotx trigonometrik referans fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen $f(x)=2\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

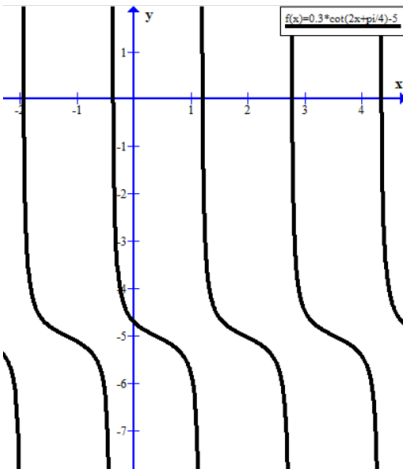


www.matbaz.com

Örnek...26 :

Uygun tanım ve değer kümesine sahip f(x)=cotx trigonometrik referans fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen $\frac{1}{3}\cot(2x+\frac{\pi}{4})-5$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

y=cotx (A1) $\frac{\pi}{4}$ sola ötelenir (A2) 2 birim yatayda sıkıştırılır (A3) 3 birim düşeyde genişletilir (A4) 5 br aşağı ötelenir.



Örnek...27 :

$g(x)=\sqrt{3}\cot(x)+2$ fonksiyonunun aşağıdaki nitel özelliklerini cebirsel yollarla bularak belirtiniz. Grafiğini çiziniz

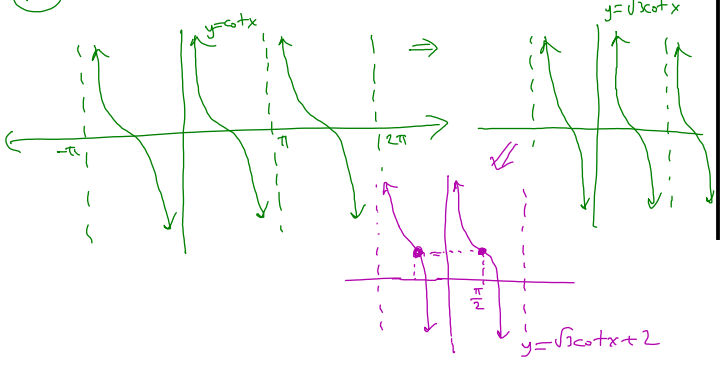
a) Tanım ve Görüntü Kümeleri $T.K=\mathbb{R}-\{x: x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
b) Sıfırını ve y ekseni kesim noktasını $G.K=\mathbb{R}$
c) Artanlık ve azalanlık durumunu
d) Maksimum ve minimumlarını
e) İşareti
f) Bire birlik durumunu
g) Örten olma durumunu
h) Tek/çift olma durumunu
i) Periyodunu belirtiniz.

sıfırı: $\sqrt{3}\cot x+2=0 \Rightarrow \cot x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x=\operatorname{arccot}(-\frac{2}{\sqrt{3}})+k\pi$ tam sıfırları elde edilir $(k\in\mathbb{Z})$

y kesimi: $x=0 \Rightarrow y=?$ $(x=0\notin T.K)$ grafik y ekseni kesmez

c) tanımlı olduğu her periyot bağımsız özdeştir.
d) Maksimum ya da minimumu yoktur.
e) $\cot x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ bölgelerinin solunda +, sağında − olur.
f) bire-bir değildir. g) örtendir
h) tek ya da çift değildir $(f(x)\neq f(-x) \wedge f(x)\neq -f(-x))$
i) periyodu $\frac{\pi}{1}=\pi$ dir

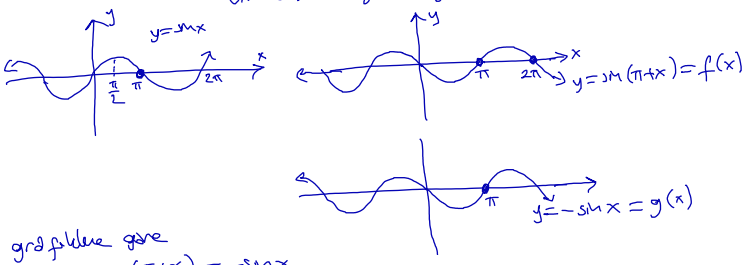
y=cotx grafiğinden $y=\sqrt{3}\cot x+2$ elde edilirken
(A1) y=cotx $\sqrt{3}$ br düşeyde genişler
(A2) elde edilen grafik 2 br yukarı yönde ötelenir.



Örnek...28 :

Uygun tanım ve değer kümesine sahip f(x)=sin(x+π) ve g(x)=-sinx şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonların grafik temsillerini kullanarak f(x)=g(x) eşitliğini doğrulayınız.

y=sinx verilsin. (1) f(x)=sin(π+x) çizilirken y=sinx π br sola ötelenir. (2) g(x)=−sinx çizilirken y=sinx fonksiyonunun Ox ekseni göre yansıması alınır.



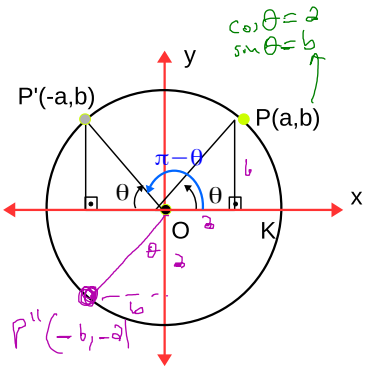
grafiklere göre $\sin(\pi+x)=-\sin x$ olduğu görülmektedir.

Örnek...29 :

Şekli inceleyiniz. Birim çemberde standart biçimde ve ölçüsü θ radyan olan bir dar açı alalım. Bu açının gördüğü yayın bitim noktasının koordinatı P(a,b) olsun. Buna göre,

$\pi-\theta$ ve $\frac{3\pi}{2}-\theta$

türündeki açıların trigonometrik oranlarını θ cinsinden hesaplayınız



$\cos\theta=a$, $\sin\theta=b$

$\pi-\theta$ yay bitim noktası P'(-a,b) olduğundan

$\cos(\pi-\theta)=-a=-\cos\theta$
$\sin(\pi-\theta)=b=\sin\theta$
$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{b}{-a}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$
$\cot(\pi-\theta)=\frac{\cos(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta$

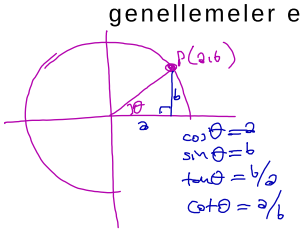
$\frac{3\pi}{2}-\theta$ yay bitim noktası P''(-b,-a) olduğundan

$\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-b=-\sin\theta$
$\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-a=-\cos\theta$
$\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$
$\cot(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$

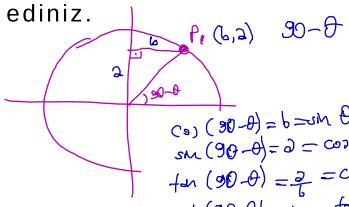
www.matbaz.com

Örnek...30 :

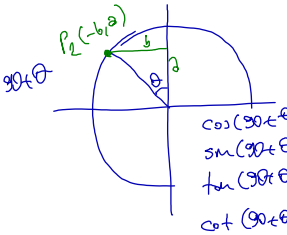
Örnek 21 deki düşünme şeklini kullanarak ölçüsü $\left(\frac{\pi}{2}\mp\theta\right)$ / $(\pi\pm\theta)$ / $\left(\frac{3\pi}{2}\mp\theta\right)$ / $(2\pi-\theta)$ olarak verilen ifadelerde π sadeleştirilmesi için genellemeler elde ediniz.



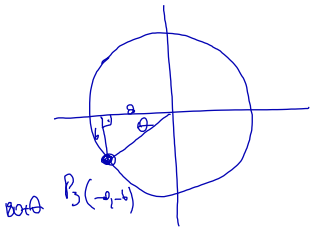
$\cos\theta = a$
$\sin\theta = b$
$\tan\theta = b/a$
$\cot\theta = a/b$



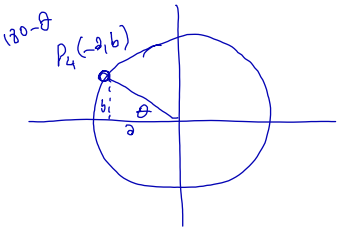
$\cos(90-\theta) = b = \sin\theta$
$\sin(90-\theta) = a = \cos\theta$
$\tan(90-\theta) = \frac{a}{b} = \cot\theta$
$\cot(90-\theta) = \frac{b}{a} = \tan\theta$



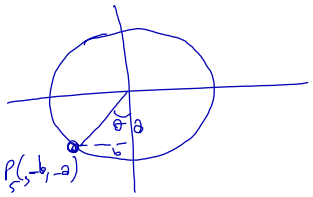
$\cos(90+\theta) = -b = -\sin\theta$
$\sin(90+\theta) = a = \cos\theta$
$\tan(90+\theta) = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$
$\cot(90+\theta) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$



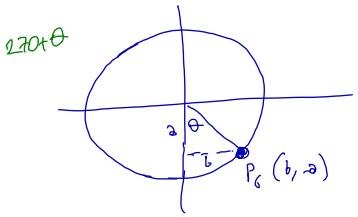
$\cos(180+\theta) = -a = -\cos\theta$
$\sin(180+\theta) = -b = -\sin\theta$
$\tan(180+\theta) = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$
$\cot(180+\theta) = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$



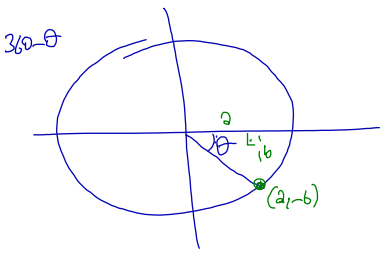
$\cos(180-\theta) = -a = -\cos\theta$
$\sin(180-\theta) = b = \sin\theta$
$\tan(180-\theta) = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$
$\cot(180-\theta) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$



$\cos(270-\theta) = -b = -\sin\theta$
$\sin(270-\theta) = -a = -\cos\theta$
$\tan(270-\theta) = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$
$\cot(270-\theta) = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$



$\cos(270+\theta) = b = \sin\theta$
$\sin(270+\theta) = -a = -\cos\theta$
$\tan(270+\theta) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$
$\cot(270+\theta) = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$



$\cos(360-\theta) = a = \cos\theta$
$\sin(360-\theta) = -b = -\sin\theta$
$\tan(360-\theta) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$
$\cot(360-\theta) = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$

www.matbaz.com

Örnek...31 :

Trigonometrik bir referans fonksiyon seçiniz. Gerçek yaşama ait bir periyodik olayı (salıncak, gölge, ses dalgası, dönme dolabı) bu fonksiyonla modelleyiniz. Modelinizi tablo, grafik ve cebirsel temsil ile sununuz. Varsayımlarınızı, genellemelerinizi ve modelin sınırlılıklarını gerekçelendiriniz.

DERECELİ PUANLAMA ANAHTARI

Boyut	4 (Mükemmel)	3 (İyi)	2 (Gelişmekte)	1 (Başlangıç)
Temsil Geçişleri	Tüm temsiller (sözel, tablo, grafik, cebir) tutarlı ve birbirini destekler.	En az 3 temsil tutarlı.	2 temsil arasında geçiş var, tutarsızlık var.	Sadece 1 temsil kullanılmış.
Varsayım/ Genelleme	Varsayımlar veriye dayalı, genelleme gerekçeli.	Varsayımlar var, genelleme zayıf gerekçeli.	Varsayımlar tahmin düzeyinde.	Hazır formül ezberlenmiş.
Gerçek Yaşam Bağlamı	Model gerçekçi, sınırlılıklar tartışılmış.	Model gerçekçi ama sınırlılıklar yok.	Model yüzeysel.	Bağlam yok veya uydurma.
İspat/ Doğrulama	Cebirsel ve grafiksel doğrulama birlikte yapılmış.	Sadece bir yöntemle doğrulama.	Doğrulama eksik.	Doğrulama yok.
İletişim ve İş Birliği	Sözel sunum matematiksel dil kullanır, arkadaşları dinler.	Sunum anlaşılır, eksikler var.	Sunum karışık.	Katılım yok.

www.matbaz.com

ÖZ DEĞERLENDİRME FORMU (ÖĞRENCİ)

“Bu çalışmada hangi varsayımlarımın doğru çıktığını, hangilerinin yanlış çıktığını nasıl anladım?”

“Modelimi başka bir gerçek yaşam olayına uygulayabilir miyim? Hangi değişiklikleri yapmalıyım?”