TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bu bölümde önce trigonometrik referans fonksiyonları olan f(x)=sinx, g(x)=cosx, h(x)=tanx ve r(x)=cotx fonksiyonlarının 0-360 arası grafiklerini oluşturup sonra bunu periyodik fonksiyonlarla ilişkilendirceğiz

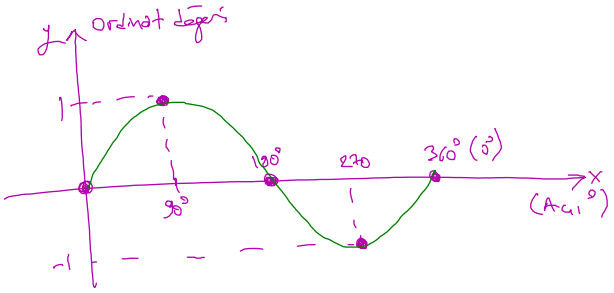
Örnek...1 :

Tabloda derece türünden değerleri verilen değerler için ya da aralıklarda açılar küçükten büyüğe doğru artarken sinüs ve kosinüs değerlerinin değişim durumlarını (artma/azalma) belirtiniz. Yandaki qr kodu kullanarak değişimleri inceleyeniz.

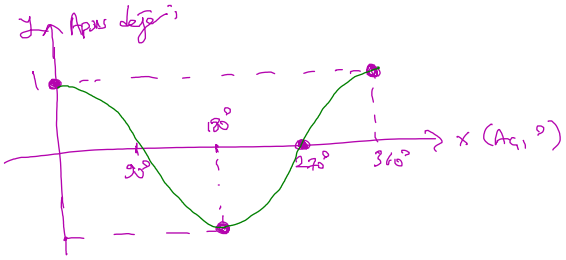
Açı	0	0-90	90	90-180	180	180-270	270	270-360
Sinüs değeri	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗
Kosinüs değeri	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗

Yukarıdaki tablodaki durumlara göre
a) Birim çember üzerindeki noktaların ordinatlarını gösteren eğriyi çiziniz
b) Birim çember üzerindeki noktaların apsislerini gösteren eğri çiziniz

a)



b)



www.matbaz.com

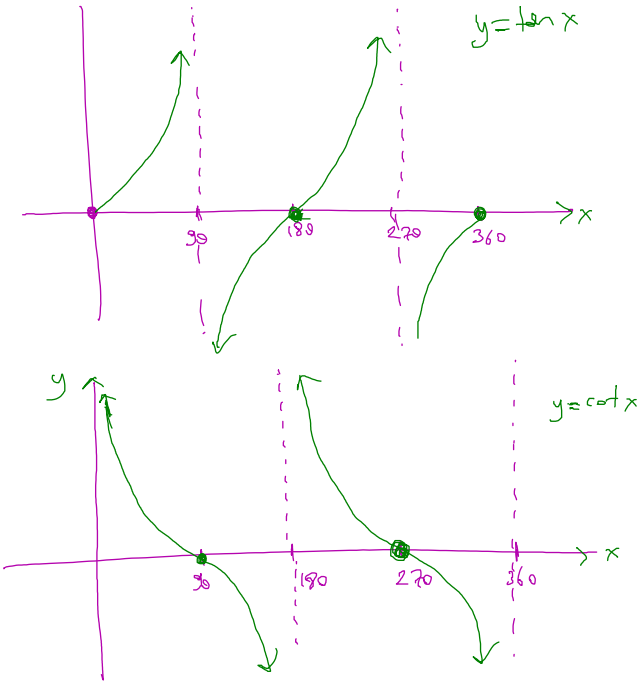
Örnek...2 :

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ve $\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}$ trigonometrik ifadelerinden hareketle verilen tablodaki değer ve aralıklarda tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

Açı (x)	0	0-90	90	90-180	180	180-270	270	270-360
Tanjant değeri (tanx)	0	↗	∞	↗	0	↗	-∞	↗
Kotanjant değeri cot(x)	∞	↘	0	↘	-∞	↘	0	↘

Örnek...3 :

Yukarıdaki tablodaki değerlere göre
a) birim çember üzerindeki noktaların ordinatlarının apsislerine oranlarını gösteren eğriyi çiziniz
b) birim çember üzerindeki noktaların apsislerinin ordinatlarına oranlarını gösteren eğriyi çiziniz



$f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$
$g:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$
$t:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$, $t(x)=\tan x$
$c:\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $c(x)=\cot x$ şeklinde tanımlı f, g, h ve r fonksiyonlarına **trigonometrik referans fonksiyonlarıdır**.

Örnek...4 :

Verilen ölçüler (°) için tabloyu doldurunuz

Açı (x)	30	45	60	120	135	150	210	240	315	330
Sin(x)	1/2	√2/2	√3/2	√3/2	√2/2	1/2	-1/2	-√3/2	-√2/2	-1/2
Cos(x)	√3/2	√2/2	1/2	-1/2	-√2/2	-√3/2	-√3/3	-1/2	√2/2	√3/2
tan(x)	√3/3	1	√3	-√3	-1	-√3/3	√3/3	√3	-1	-√3/3
cot(x)	√3	1	√3/3	-√3/3	-1	-√3	√3	√3/3	-1	-√3

PERİYOT

Mevsimler, haftanın günleri, dünyanın güneşin etrafındaki hareketleri tekrarlanır. Bu tür olayların periyodik olarak meydana geldiğini söyleyebiliriz.

Matematikte de bazı fonksiyonların grafikleri belli aralıklarda kendilerini yinelerler. Bu tür fonksiyonlar periyodik fonksiyon olarak adlandırılır.

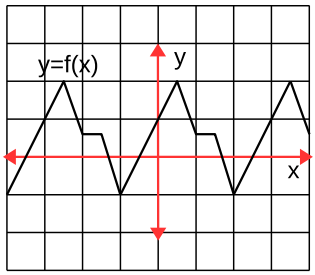
PERİYODİK FONKSİYONUN TANIMI

$f:A\to B$, $x\to y=f(x)$ fonksiyonunda A kümesinin her x elemanı için **f(x+T)=f(x)** olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir T reel sayısı varsa, f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına f fonksiyonunun periyodu denir.

Bir fonksiyon birden fazla periyoda sahip olabilir. Periyodun birden fazla olması durumunda pozitif en küçük olanına **esas periyot** denir.

Örnek...5 :

Şekilde grafiği verilen y=f(x) fonksiyonun periyodu kaçtır?



$T=3,6,9,..$
(genel olarak $3k\ (k\in\mathbb{Z})$)

Örnek...6 :

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde inceleyiniz.
f(x)=sinx, g(x)=sin2x,h(x)=sin3x, r(x)=sin4x
a) Her fonksiyonun periyodunu belirleyiniz.
b) Elde ettiğiniz sonuçlardan hareketle periyot ile katsayı arasındaki ilişkiye yönelik bir **varsayım** oluşturunuz.
c) Varsayımınızı kullanarak y=sin(mx)(m≠0) fonksiyonunun periyoduna ilişkin genel bir önerme yazınız.
d) Yazdığınız önermenin doğru olduğunu cebirsel olarak gösteriniz.

a) $T_f=2\pi$ $T_g=\pi$ $T_h=\frac{2\pi}{3}$ $T_r=\frac{2\pi}{4}$
b) $d(x)=\sin px \Rightarrow T_d=\frac{2\pi}{p}$
c) $\sin(mx) \Rightarrow \frac{2\pi}{m}=T$
d) $\sin(mx)=\sin(m(x+T)) \Rightarrow mx=mx+2\pi=mx+mT \Rightarrow T=\frac{2\pi}{m}$

www.matbaz.com

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYOTLARI

k bir tam sayı ve x tanım kümelerinin herhangi bir elemanı olmak üzere,

$$\sin(x+k.2\pi)=\sin x$$
$$\cos(x+k.2\pi)=\cos x$$
$$\tan(x+k.\pi)=\tan x$$
$$\cot(x+k.\pi)=\cot x$$

olduğundan trigonometrik fonksiyonlar periyodiktir.

Örnek...7 :

(zenginleştirme)

1. sinx ve cosx fonksiyonlarının periyodu **k.2π**, tanx ve cotx fonksiyonlarının periyodu **k.π** dir.

sinx ve cosx fonksiyonlarının esas periyodu (k = 1 için) **2π**; tanx ve cotx fonksiyonlarının esas periyodu **π** dir.

Yandaki QR bağlantısını kullanarak çeşitli fonksiyonlar yazarak aşağıdaki boşlukları dolduracak varsayımlarınızı yazınız.
(Özellikle f(px) türü bir fonksiyon ile f(x) grafik ilişkisini düşününüz.)

Aşağıdaki boşlukları doldururken gerekçelerinizi açıklayarak yazınız.

2. $f(x)=a+b.\sin^m(px+q)$, $f(x)=a+b.\cos^m(px+q)$ fonksiyonlarının esas periyodu T ise $T=\begin{cases}\frac{2\pi}{|p|} & ;\ m \text{ tekse}\\ \frac{\pi}{|p|} & ;\ m \text{ çiftse}\end{cases}$

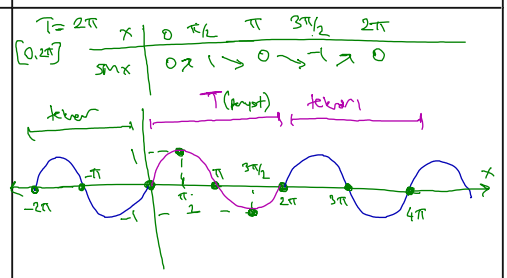
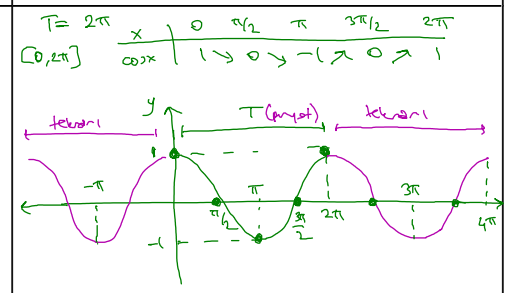
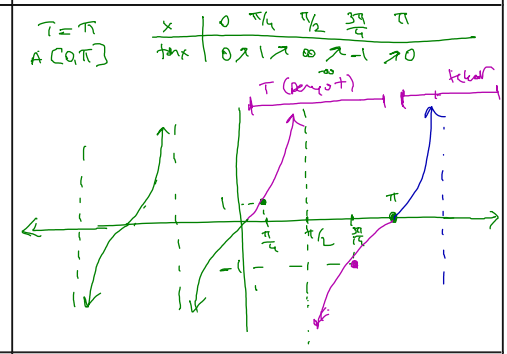
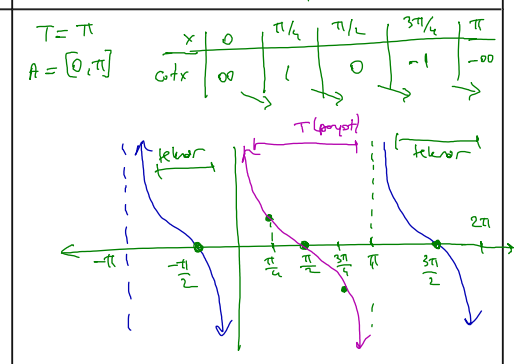
3. $f(x)=a+b.\tan^m(px+q)$, $f(x)=a+b.\cot^m(px+q)$ fonksiyonlarının periyodu T ise $T=\frac{\pi}{|p|}$

4. Genellemelerinize göre aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını hesaplayınız

Fonksiyon	$5\cos^2(4x)$	$2-\tan^3(3x)$	$3+2\sin^7(1-5x)$	$\cot^{15}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{5}\right)$
Periyot	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3/5}=\frac{5\pi}{3}$

Örnek...8 :

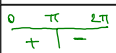
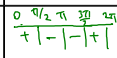
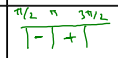
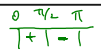
Temel trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çiziniz

Fonksiyon	Grafik
f(x)=sinx	
g(x)=cosx	
h(x)=tanx	
h(x)=cotx	

www.matbaz.com

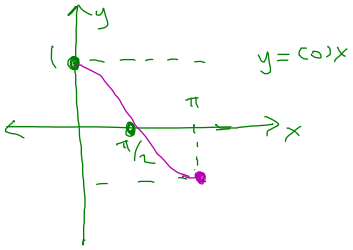
Örnek...9 :

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz. Tanım kümelerini sinx ve cosx için $[0,2\pi)$, tanx için $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ve cotx için $(0,\pi)$ aralıkları alınız.

Cebirsel temsili	f(x)=sinx	g(x)=cosx	h(x)=tanx	r(x)=cotx
Tanım Kümesi	$[0,2\pi)$	$[0,2\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
Görüntü Kümesi	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$	$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$
Sıfırı	$x=0,\pi$	$x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$	$x=\pi$	$x=\pi/2$
İşareti				
Artan olduğu küme	$[0,\frac{\pi}{2})\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi)$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]\cup[\frac{5\pi}{2},2\pi)$	$(\frac{\pi}{2},\pi]\vee(\pi,\frac{3\pi}{2})$	—
Azalan olduğu küme	$[\frac{\pi}{2},\pi]\vee[\pi,\frac{3\pi}{2})$	$[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{\pi}{2},\pi]$	—	$(0,\pi)$
Maksimum	1	1	$+\infty$ (YOK)	$+\infty$ (YOK)
Minimum	-1	-1	$-\infty$ (YOK)	$-\infty$ (YOK)
Bire–birlik	—	—	✓	✓
Örtenlik	TK→[-1,1] (✓) TK→IR (X)	TK→[-1,1] (✓) TK→IR (X)	TK→IR ✓	TK→IR ✓
Periyot	2π	2π	π	π
Tek/Çift olma durumu	tek	çift	tek	tek

Örnek...10 :

$f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $x\to y=\cos x(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizerek tablodaki nitel özelliklerini doldurunuz.

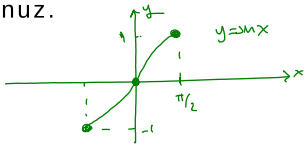


Tanım Kümesi	$[0,2\pi]$
Görüntü Kümesi	$[-1,1]$
Sıfırı	$x=\pi/2$
İşareti	0 $\pi/2$ π | + | − |
Artan olduğu küme	—
Azalan olduğu küme	$[0,\pi]$
Maksimum	1
Minimum	−1
Bire–birlik	✓
Örtenlik	✓ (değer kümesi $[-1,1]$ için)
Periyot	Bu tanım kümesinde cosx periyodik değildir. (Aralık boyu 2π den küçük, tekrar etme sayısı yok!)
Tek/Çift olma durumu	Bu aralık için $\pm f(-x)=f(x)$ eşitliği sağlanmaz bu aralık için ne çift ne tektir.

www.matbaz.com

Örnek...11 :

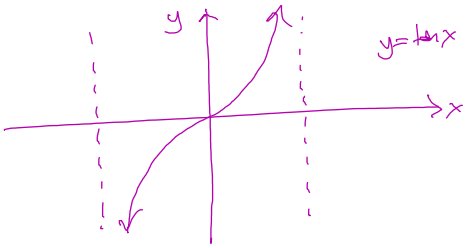
$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $x\to y=\sin x(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizerek tablodaki nitel özelliklerini doldurunuz.



Tanım Kümesi	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
Görüntü Kümesi	$[-1,1]$
Sıfırı	$x=0$
İşareti	$-\pi/2$ 0 $\pi/2$ | − | + |
Artan olduğu küme	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
Azalan olduğu küme	—
Maksimum	1
Minimum	−1
Bire–birlik	✓
Örtenlik	✓ ($[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ için)
Periyot	periyodik olamaz (verilen tanım kümesinde)
Tek/Çift olma durumu	$-f(-x)=f(x)$ olduğundan tektir.

Örnek...12 :

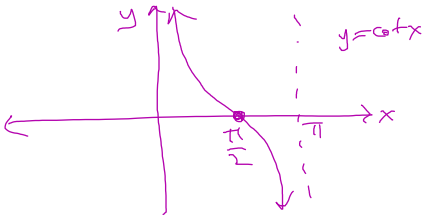
$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $x\to y=\tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizerek tablodaki nitel özelliklerini doldurunuz.



Tanım Kümesi	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
Görüntü Kümesi	$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$
Sıfırı	$x=0$
İşareti	$-\frac{\pi}{2}$ 0 π ; − + −
Artan olduğu küme	$\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)$
Azalan olduğu küme	—
Maksimum	$+\infty$ (yok)
Minimum	$(-\infty)$ (yok)
Bire–birlik	✓
Örtenlik	✓
Periyot	yok
Tek/Çift olma durumu	tek $f(-x)=-f(x)$

Örnek...13 :

$f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $x\to y=\cot x(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizerek tablodaki nitel özelliklerini doldurunuz.



Tanım Kümesi	$(0,\pi)$
Görüntü Kümesi	$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$
Sıfırı	$\pi/2$
İşareti	0 $\pi/2$ π ; + − −
Artan olduğu küme	$(0,\pi)$
Azalan olduğu küme	—
Maksimum	∞ (yok)
Minimum	$-\infty$ (yok)
Bire–birlik	✓
Örtenlik	✓
Periyot	yok
Tek/Çift olma durumu	tek $f(-x)=-f(x)$

www.matbaz.com