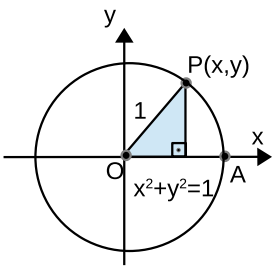
TRİGONOMETRİ

Trigonometri, üçgenlerde açı ölçüleri ile kenar uzunlukları arasındaki bağlantıları inceleyen bir matematik dalıdır. Özellikle dik üçgenlerde bu ilişkiler, tarih boyunca denizcilik, haritacılık ve astronomi gibi alanlarda önemli problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Örneğin denizciler yönlerini belirlemek için yıldızların konumlarını hesaplarken, haritacılar da mesafe ve yükseklik ölçümlerinde trigonometriden yararlanmışlardır.

BİRİM ÇEMBER

Analitik düzlemde merkezi O(0,0) noktası ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** (**trigonometrik çember**) denir.



Örnek...1 :

$L\left(\frac{1}{2},k\right)$ noktası birim çember üzerinde ise k nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+k^2=1 \quad k^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad k=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

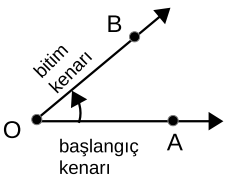
$k_1.k_2=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{-3}{4}$

YÖNLÜ AÇI KAVRAMI

Çembersel hareketlerde yönü aşağı, yukarı, sağ ya da sol gibi ifadelerle belirtmek karışıklığa yol açabileceğinden, bunun yerine pozitif ve negatif yönlü açı kavramları kullanılır. Örneğin Dünya'nın hem kendi ekseni etrafındaki dönüşü hem de Güneş etrafındaki dolanımı ile atomda elektronların hareketi pozitif yönlü kabul edilir.

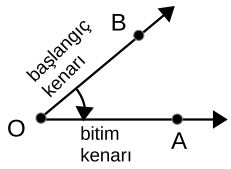
Başlangıç noktaları aynı olan iki ışından biri başlangıç kolu diğeri bitiş kolu olarak alındığında oluşan açıya yönlü açı denir.

1. POZİTİF YÖNDE YÖNLENDİRİLMİŞ AÇI:



Başlangıç kenarından bitim kenarına saatin dönme yönünün tersi takip edilerek ulaşılıyorsa bu açıya pozitif yönde yönlendirilmiş açı denir. $\widehat{AOB}$ 'nın yönü pozitiftir.

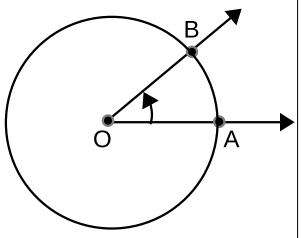
2. NEGATİF YÖNDE YÖNLENDİRİLMİŞ AÇI:



Başlangıç kenarından bitim kenarına saatin dönme yönü takip edilerek ulaşılıyorsa bu açıya negatif yönde yönlendirilmiş açı denir. $\widehat{BOA}$ ' nın yönü negatiftir.

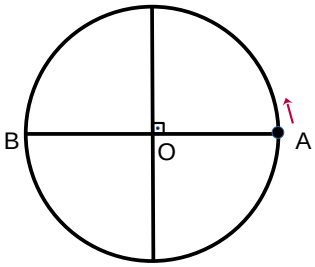
YÖNLÜ YAYLAR

O merkezli bir çember çizelim: AB yayının yönü olarak AOB açısının yönü alınır. Şekildeki AOB açısının yönü pozitif olduğundan AB yayının yönü pozitif olur. Burada, A noktası yay başlangıç, B ise yay bitim noktasıdır.



Örnek...2 :

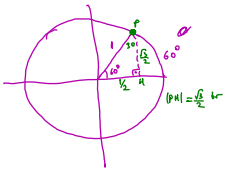
Yandaki şekilde yarıçap uzunluğu 1 birim olan dairesel pistteki hareketli, pozitif dönme yönünde sabit bir hızla hareket ederek pistin çevresi üzerindeki turunu 30 saniyede tamamlamaktadır. A, O ve B doğrusal olduğuna göre A noktasından harekete başlayan hareketli ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.



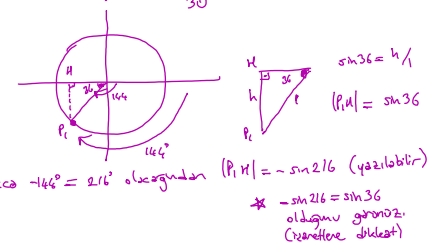
a) Hareketlinin pozitif yöndeki hareketinin 5. saniyesinde AB doğrusuna olan uzaklığı kaç birimdir?

b) Hareketlinin negatif yöndeki hareketinin 12. saniyesinde AB doğrusuna olan uzaklığını trigonometrik ifade kullanarak yazınız.

a) 30 saniyede 360°
5 saniyede 60° döner $\curvearrowright +$



b) 30 saniyede 360°
12 saniyede $\frac{12.360}{30}=144^\circ$ döner $\curvearrowleft -$



Ayrıca $-144^\circ = 216^\circ$ olacağından $|P_1H| = -\sin 216$ (yazılabilir)

$-\sin 216 = \sin 36$ olduğunu görmüş oluruz. (Yazılmaz dikkat!)

www.matbaz.com

Örnek...3 :



Yandaki görselde şifre girmek için oluşturulmuş bir sistem verilmiştir. Sistem üzerine merkezleri aynı iki çember arasında ve aralıkları eşit olan 10 rakamın tamamı yerleştirilmiştir. Girilecek şifrenin 4 basamaklı olduğu ve içinde 0 olmadığı bilinmektedir. Başlangıçta 0 ı gösteren kırmızı uç , şifrede bulunan sıradaki rakamı oluşturmak için düğmenin belirli açılarda döndürülmesi ve ucun gösterdiği rakam üzerinde üç saniye beklenilmesiyle altta belirmektedir. Sonra tekrar 0 konumuna getirilen gösterge okunun ucu şifrenin sıradaki rakamı için işlemlerin tekrar edilmesiyle oluşturulur. şifre mekanizması sırasıyla -144° , 108° , $216, -72$ çevrilerek 4 sayıdan oluşan şifre oluşturulmuştur. Buna göre şifreyi bulunuz.

eşit 10 aralık için bir aralık 36° olsun

$\frac{144}{36} \rightarrow$ 4 aralık (-) yön $\rightarrow$ 6 $\quad 216^\circ \rightarrow$ 6 aralık 6

$\frac{108}{36} \rightarrow$ 3 aralık (+) yön $\rightarrow$ 3 $\quad -72 \rightarrow$ 2 aralık 8

şifre 6368

AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Açıyı ölçmek demek açının kolları arasındaki açıklığı belirtmek demektir.

1) DERECE :

Bir çemberin çevresi 360 eş parçaya bölündüğü zaman bu eş yay parçalarından birini gören ; köşesi merkezde olan açının ölçüsüne 1 derece (1°) denir.

1° nin 60 ta birine 1 dakika (1') denir.

$1^\circ=60'$

1' nın 60 ta birine 1 saniye (1'') denir.

$1' =60''$

Bir açının ölçüsü a derece, b dakika ve c saniye ise bunu $a^\circ + b' + c''$ veya $a^\circ\ b'\ c''$ biçiminde gösteririz

SONUÇ

$1^\circ=60'=3600''$

www.matbaz.com

Örnek...4 :

Ölçüsü $4^\circ\ 12'\ 43''$ olan açının saniye cinsinden eşiti kaçtır

$23 + 12.60 + 4.60.60 = 23 + 720 + 14400$

$14400 + 720 + 23 = 15143''$

Örnek...5 :

15873'' lik açı kaç derece kaç dakika ve kaç saniyedir?

$15873 = 4^\circ 24' 33''$

Örnek...6 :

Şıklarda verilen işlemleri yapınız.

a) $50^\circ\ 25'\ 30'' + 34^\circ\ 18'\ 6''$

$84^\circ\ 43'\ 36''$

b) $75^\circ\ 18'\ 21'' + 53^\circ\ 56'\ 52''$

$128^\circ\ 74'\ 73''$

$128^\circ\ 75'\ 13''$

$129^\circ\ 15'\ 13''$

c) $75^\circ\ 18'\ 21'' - 53^\circ\ 56'\ 52''$

$75^\circ\ 17'\ 81''$

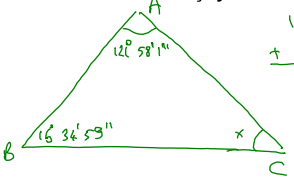
$74^\circ\ 77'\ 81''$

$53^\circ\ 56'\ 52''$

$21^\circ\ 21'\ 29''$

Örnek...7 :

Bir harita üzerinde A, B ve C noktaları arasında üç yol var. A noktasından diğer iki yola ayrılan açı **$121^\circ\ 58'\ 1''$**, B noktasından diğer iki yola ayrılan açı **$16^\circ\ 34'\ 59''$** ölçülmüştür.
Bu ölçümlerin **iç açı** olduğunu varsayarak, C noktasındaki açıyı bulunuz.



$121^\circ\ 58'\ 1'' + 16^\circ\ 34'\ 59'' = 137^\circ\ 92'\ 60''$

$137^\circ\ 93'$

$138^\circ\ 33'$

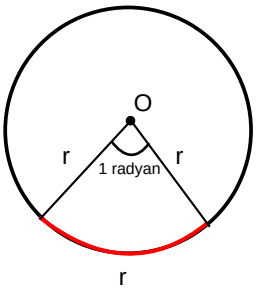
$180^\circ - 138^\circ\ 33'$

$179^\circ\ 60' - 138^\circ\ 33'$

$41^\circ\ 27'$

2) RADYAN :

Bir çemberde yarıçap uzunluğunda bir yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 radyan denir. Böylece çember yayının uzunluğu 2π radyan dır.



Örnek...8 :

Açı ölçü birimlerini birbiri türünden elde etmek için genel bağıntıyı bulunuz. Bunu yaparken tam açı ölçüleri üzerinden yorum yapabilirsiniz.

360° ↔ 2π rad

D° ↔ R rad

$360 \cdot R = 2\pi \cdot D \Rightarrow \frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$

ya da

$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

Derece D, radyan R ile gösterilirse açı ölçü birimleri arasında $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ orantısı vardır.

Bu notta bir açının ölçüsü pi cinsinden yazıldığında ölçünün birimi radyan olarak kabul edilecektir.

Örnek...9 :

Ölçüsü 120° olan açıyı radyan türünden bulunuz.

$\frac{120}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$

Örnek...10 :

Ölçüsü $\frac{\pi}{5}$ radyan olan açıyı derece türünden bulunuz.

$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow \frac{\pi/5}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = 36^\circ$

radyanı dereceye çevirirken π yerine 180° yazabiliriz.

$\Rightarrow \frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

Örnek...11 :

Derece olarak verilmiş açıların radyan karşılıklarını yazınız

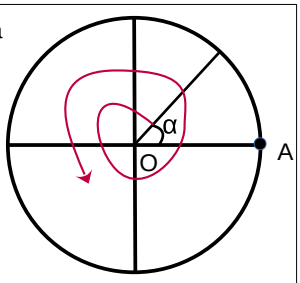
0°	30°	45°	90°	180°	270°
0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\frac{3\pi}{2}$

www.matbaz.com

AÇININ ESAS ÖLÇÜSÜ

Standart pozisyonda (köşesi orijin ve başlangıç kenarı Ox ekseni) verilmiş ve ölçüsü α olan açının birim çember üzerinde gördüğü yayın bitim noktası ile; standart pozisyonda ve ölçüsü $\alpha + k.360^\circ$ $(k \in Z)$ ya da $[\alpha + k.\ 2\pi\ ^\circ\ (k \in Z)]$ olan açının gördüğü yayın bitim noktası aynıdır.

Yandaki kare kod ile farklı açılar için aynı yay bitim noktalarını inceleyebilirsiniz



ESAS ÖLÇÜ :

Bir açının ölçüsü derece olarak verilmişse [0,360) aralığındaki ; radyan olarak verilmişse [0, 2π) aralığındaki değerine o açının **esas ölçüsü** denir.

SONUÇLAR

1. Açının esas ölçüsü negatif olamaz.

2. Açının esas ölçüsü bulunurken tam dönüşler çıkarılır.

Örnek...12 :

Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini bulunuz.

a) 1100° $1100 = 1080 + 20$, $1100^\circ = 20^\circ$ (esas ölçü)

b) 61400° $61400 = 360 \cdot 170 + 200$, E.Ö $= 200^\circ$

c) -80° $-80 = -80 + 360 = 280^\circ$ (esas ölçü) — tamdevir eklenir

d) -7000° $7000 = 360 \cdot 19 + 160$, $-7000^\circ = -160^\circ = -(160+360) = 200^\circ$ (E.Ö)

e) $\frac{53\pi}{5}$ $53 = 10 \cdot 5 + 3 \Rightarrow \frac{53\pi}{5} = \frac{(5.10+3)\pi}{5} = 5.2\pi + \frac{3\pi}{5}$

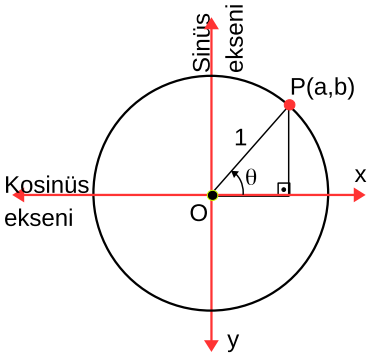
pay paydaya 2 defa bölünür bölmeyenler ve kesir paydaki yazılır $\Rightarrow \frac{3\pi}{5}$, E.Ö $= \frac{3\pi}{5}$

f) $-\frac{53\pi}{5} \rightarrow -\frac{3\pi}{5}$ (ortaklı örnekteki) E.Ö $= -\frac{3\pi}{5} + 2\pi = \frac{7\pi}{5}$ — tamdevir

g) $-\frac{23\pi}{3}$ $23 = 6 \cdot 3 + 5 \Rightarrow -\frac{5\pi}{3}$, E.Ö $= -\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR
BİR AÇININ KOSİNÜS VE SİNÜS DEĞERLERİ

Merkezi orijin ve yarıçapı 1 birim olan çembere birim çember denir. Standart pozisyonda (Köşesi orijinde, başlangıç kenarı x ekseni ve yönü pozitif yön olan açı) ve ölçüsü θ olan açının birim çember üzerinde yay bitim noktası P(a,b) olsun:



A) **cos(θ)=a** olarak tanımlanır.
O_x eksenine kosinüs ekseni denir.

θ reel sayısını $\cos\theta$ ile eşleyen fonksiyona **kosinüs fonksiyonu** denir.

Kosinüs Fonksiyonu
$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$
$\theta \rightarrow \cos\theta$
Burada $\cos\theta$ 'nın değer aralığı
$-1 \le \cos\theta \le 1$ dir.

Ayrıca, $\cos(\theta + k.2\pi) = \cos\theta$ dır. $(k \in \mathbb{Z})$

B) **sin(θ)=b** olarak tanımlanır.
O_y eksenine ise sinüs ekseni denir

θ reel sayısını $\sin\theta$ ile eşleyen fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir

Sinüs Fonksiyonu
$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$
$\theta \rightarrow \sin\theta$
Burada $\sin\theta$ 'nın değer aralığı
$-1 \le \sin\theta \le 1$ dir.

Ayrıca, $\sin(\theta + k.2\pi) = \sin\theta$ dır. $(k \in \mathbb{Z})$

Birim çember üzerindeki her P(x,y) noktası için $P(x,y)=P(\cos\theta, \sin\theta)$ eşitliği sağlanır.

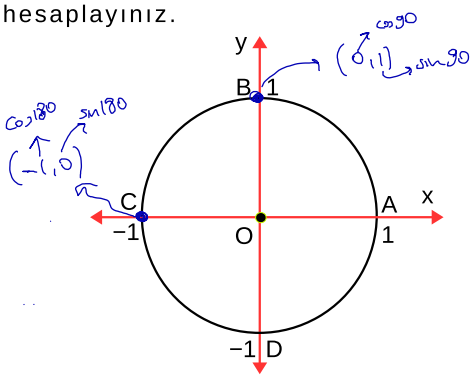
SONUÇ

OKP dik üçgenin de $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ dir.

www.matbaz.com

Örnek...13 :

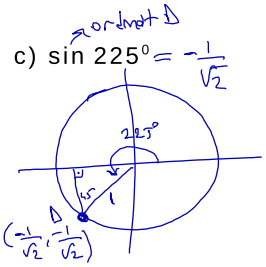
Birim çember kullanarak aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.



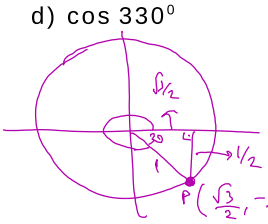
a) $\sin 90^0$ B noktasından $\sin 90 = 1$

b) $\cos 180^0$ C noktasından $\cos 180 = -1$

c) $\sin 225^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



d) $\cos 330^0$



$\cos 330 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (apsis P)

Örnek...14 :

$$\frac{\sin^2 12 + \cos^2 12 - 1}{\sin 67 + \cos 34 . \sin 41} = \frac{0}{\text{sayı}} = 0 \neq 0$$

işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...15 :

$$\frac{8+\cos^2 x}{\sin x+3}+\sin x+2$$

işleminin sonucu kaçtır?

$8+\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x+3\sin x+6 = 15+5\sin x = 5(3+\sin x) = 5$

$\sin x+3 \qquad \sin x+3 \qquad \sin x+3$

II. Yol $\cos^2 x$ yerine $1-\sin^2 x$ yazalım

$\frac{8+1-\sin^2 x}{\sin x+3}+\sin x+2 \quad \frac{9-\sin^2 x}{\sin x+3} = \frac{(3-\sin x)(3+\sin x)}{\sin x+3} = 3-\sin x$

sonuç $3-\sin x+\sin x+2 = 5$

Örnek...16 :

Bir müzik stüdyosunda ses dalgalarının genliği, belirli bir formülle modelleniyor. Bir ses efekti cihazının çıkış değeri g şu bağıntıyla hesaplanıyor: $g=\frac{13+5\sin x}{3}$

Burada x , ses dalgasının faz açısını (radyan cinsinden) göstermektedir. Teknik ekibin cihazı yalnızca **tam sayı** değerlerde çalışabilmektedir.

a) sinx ifadesinin alabileceği değer aralığını **gerekçe vererek** açıklayınız.

b) g 'nin alabileceği **tam sayı** değerlerini bulunuz. Her bir tam sayı değeri için sinx 'in hangi değeri gerektiğini **gerekçelendirerek** yazınız.

a) $-1 \le \sin x \le 1$ (Birim çemberde bir noktanın ordinat değeri en az -1, en çok $+1$ dir)

b) $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -5 \le 5\sin x \le 5 \Rightarrow 8 \le 13+5\sin x \le 18$

$\Rightarrow \frac{8}{3} \le \frac{13+5\sin x}{3} \le \frac{18}{3} \Rightarrow g \in [\frac{8}{3}, 6]$

$g \in \mathbb{Z}$ (verilmiş)

$g = 3, 4, 5, 6$

$g=\frac{13+5\sin x}{3} \Rightarrow \sin x = \frac{3g-13}{5}$

3 → $\sin x = -\frac{4}{5}$ | 4 → $\sin x = -\frac{1}{5}$ | 5 → $\sin x = \frac{2}{5}$ | 6 → $\sin x = 1$

Örnek...17 :

Bir binanın gölge boyu, güneşin açısına bağlı olarak değişmektedir. Gölge boyunun zamana bağlı değişimini kosinüs fonksiyonu, t saat olmak üzere $h(t)=10-8\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right)$ metre biçiminde modellenmiştir.($6 \le t \le 18$)
Bu modelin gerçek hayatta ne anlama geleceğini vereceğiniz t değerlerine göre açıklayınız. Modelin sınırlılıkları nelerdir?

$\cos x \in [-1,1]$ olduğundan $h(t) \in [2, 18]$

$\frac{\pi}{12}(t-12) = 0 \Rightarrow t = 12$ (gölge en kısa güneş en tepede) (2 metre)

$\frac{\pi}{12}(t-12) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 18$ (gölge en uzun, güneş eğik açıyla geliyor) (18 metre)

Örnek...18 :

x açısı belirtilen aralıkta artan değerler aldığında fonksiyon değerlerinin nasıl değişeceğini belirtiniz.

↗ = artan ↘ azalan

	Açı			
Trigonometrik Değer	$0° < x < 90°$	$90° < x < 180°$	$180° < x < 270°$	$270° < x < 360°$
Sin(x)	↗	↘	↘	↗
Cos(x)	↘	↘	↗	↗

www.matbaz.com