

Günlük hayatta birçok nesne geometrik şekillerden oluşur. Kar kristalleri, futbol topu, bal peteği, tabelalar ve mimari yapılarda çokgenler görülür. Doğada da kaplumbağa kabuğu, örümcek ağı ve denizyıldızı buna örnektir. Bu şekiller estetik olmanın yanında dayanıklılık, denge ve verimlilik sağlar; bu yüzden pek çok alanda önemlidir.



DÖRTGEN

Dörtgenler sadece geometrik birer terim değil; odadaki fayanslardan futbol sahasına kadar her yerde karşımıza çıkan pratik araçlardır. Bu şekilleri ve özelliklerini bilmek, hayatını kolaylaştırır.

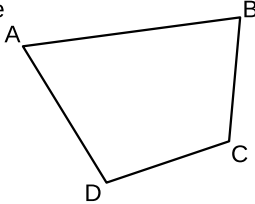
Dörtgenleri tanımak, şu gibi günlük hesaplamaları yapmayı sağlar:

- **Alan Hesabı:** Bir duvarı boyamak için kaç kutu boya gerekeceğini bilmek.
- **Çevre Hesabı:** Bahçenin etrafını kapatmak için kaç metre çit alacağını belirlemek.
- **Düzenleme:** Eşyaları bir alana en verimli şekilde yerleştirmek.

Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktanın birleştirilmesiyle elde edilen kapalı şekle dörtgen denir.

Temel elemanlar :
4 AÇI, 4 KÖŞE,
4 KENAR dır.

Bu açılar, köşeler ve kenarlar komşu ya da karşılıklıdır

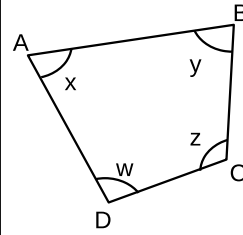


TEMEL DÖRTGENLER VE FARKLARI

Şekil	Ayırt Edici Özellik
Kare	Tüm kenarları eşit ve açıları 90° .
Dikdörtgen	Karşılıklı kenarları eşit ve açıları 90° .
Paralelkenar	Karşılıklı kenarları paralel ve eşit (açılar 90° olmayabilir).
Yamuk	En az iki kenarı birbirine paralel.
Deltoid	Tabanları çakışık iki ikizkenar üçgen

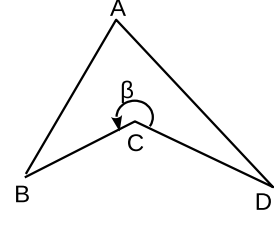
DİŞBÜKEY-İÇBÜKEY DÖRTGEN

Dışbükey Dörtgen



$$x, y, z, w < 180^\circ$$

İçbükey Dörtgen



$$\beta > 180^\circ$$

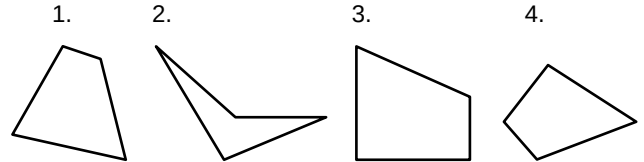
☺ : Aksi belirtilmedikçe dörtgen denildiğinde dış bükey dörtgen anlaşılabacaktır.

Her bir iç açısının ölçüsü 180° 'den küçük olan dörtgenlere dışbükey dörtgen, herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° 'den büyük olan dörtgenlere içbükey dörtgen denir.

Dışbükey dörtgenlerde köşegenler dörtgenin iç bölgesinde bulunur. İçbükey dörtgenlerde köşegenlerinden biri dörtgenin dış bölgesinde bulunur.

Örnek...1 :

Aşağıda verilen dörtgen örneklerinden hangilerinin dışbükey, hangilerinin içbükey olduklarını belirleyiniz.



DÖRTGENİN AÇI ÖZELLİKLERİ :

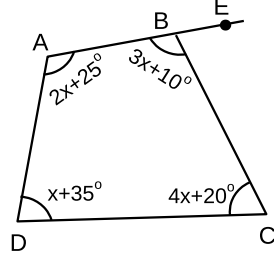
1) Dörtgenin iç açıları toplamı derecedir.
(İspat alanında dörtgeni istediğiniz şekilde iki üçgene ayırınız. Her üçgenin açı toplamını kullanarak ne fark ettiniz?)

2) Dörtgenin dış açıları toplamı dir.
(İspat alanında dörtgenin tüm köşelerindeki iç ve dış açıları düşünerek denklemler oluşturup dış açıların toplamı hakkında ne elde edilebilir?)

İspat

Örnek...2 :

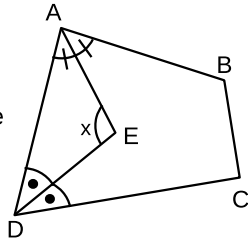
ABCD dörtgen ve A, B, E doğrusal olduğuna göre, $\widehat{CBE}$ açısı kaç derecedir?

**Örnek...3 :**

Bir dörtgenin dış açıları sırasıyla 3, 4, 5, 6 sayıları ile orantılı olduğuna göre, en büyük iç açısı kaç derecedir?

3) Dörtgenin komşu iki iç açısının (A ve D) açılımları arasında kalan açının ölçüsünü, diğer iki iç açının (B ve C) ölçüleri türünden elde edip aşağıdaki genellemeyi tamamlayınız.

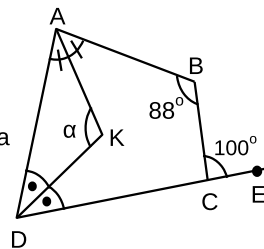
$$m(\widehat{AED}) = x = \dots$$



İspat

Örnek...4 :

ABCD dörtgeninde D, C, E doğrusaldır. A ve D köşelerinin açılımları K noktasında kesişmektedir. Buna göre, $m(\widehat{AKD}) = \alpha$ açısının ölçüsü kaç derecedir?

**Örnek...5 :**

Bir mimarlık ofisi, Matbaz Tasarım markası altında modern bir kütüphane tavanı için dörtgen şeklinde asimetric bir aydınlatma paneli tasarlıyor. Tasarım ekibi, tavanın estetik görünmesi ve ışığın homojen yayılması için paneli belirli açısız oranlara göre yerleştiriyor.

Panelin ardışık iki köşesindeki iç açılarının ölçüleri toplamı 160° olarak belirlenmiştir. Mühendisler, ışık şiddetini dengelemek amacıyla, boşta kalan diğer iki köşenin iç açılımlarının kesiştiği noktaya ana kontrol sensörünü yerleştirmek istiyor.

Sizden istenenler:

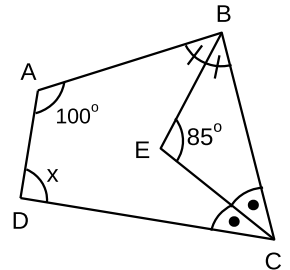
a) Model Oluşturma: Verilen mimari senaryoya uygun bir konveks dörtgen çiziniz. Ardışık iki açığı ve diğer iki açının açılımlarını çiziminiz üzerinde gösteriniz.

b) Açılımlar arasında kalan dar açının ölçüsünü bulunuz. Çözümünüzü yaparken sadece formül kullanmak yerine, dörtgenin iç açılar toplamından yola çıkarak adım adım ispat felsefesiyle denklemini kurunuz.

c) Maarif Yorumu: Tasarım ekibi ilk iki açının toplamını 160° yerine daha geniş bir açı yapsaydı, sensörün bulunduğu yerdeki dar açının ölçüsü nasıl değişirdi? Yorumlayınız.

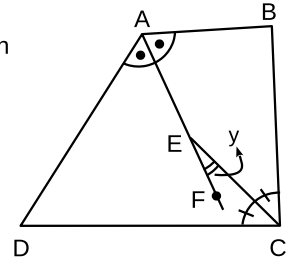
Örnek...6 :

ABCD dörtgeninde, $m(\widehat{BAD}) = 100^\circ$ $m(\widehat{CEB}) = 85^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{ADC}) = x$ açısının ölçüsü kaç derecedir?



4) Dörtgende karşılıklı iki iç açının açılımlarının kesişmesiyle oluşan dar açının ölçüsü, diğer iki iç açının (şekilde B ve D) ölçüleri türünden elde edip aşağıdaki genellemeyi tamamlayınız.

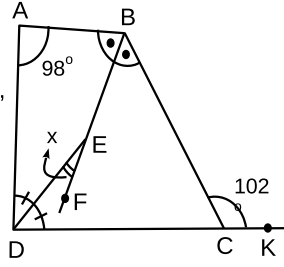
$$m(\widehat{CEF}) = y = \dots$$



İspat

Örnek...7 :

ABCD dörtgeninde B, E, F ve D, C, K doğrusaldır. Buna göre, $m(\widehat{FED})=x$ açısı kaç derecedir?

**Örnek...8 :**

Bir endüstriyel tasarım fabrikasında, dörtgen biçimindeki sabit bir platform (ABCD) üzerinde iki farklı yöne hareket edebilen mekanik kollar tasarlanmıştır.

B ve D köşelerinde bulunan motorlar, bulundukları köşelerin açılarını her zaman tam ortadan ikiye bölecek şekilde (açıortay doğrultusunda) BF ve DE hatları boyunca hareket etmektedir.

Yazılımdaki bir hatadan dolayı, platformun A köşesindeki sabit açının ölçüsü, C köşesindeki açının ölçüsünden her zaman 64° fazla olmak zorundadır ($m(A) = m(C) + 64^\circ$).

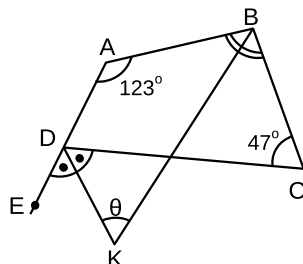
Kolların hareket mekanizması, doğrusal olan B, E, F hattı ile DE hattının kesiştiği E noktasındaki y yönlendirme açısına göre kalibre edilmektedir. Buna göre :

a) Verilen doğrusal hatları ve açıortay ilişkilerini kullanarak $m(\widehat{BED}) = y$ açısının kaç derece olduğunu, hazır formül kullanmadan dörtgenin ve üçgenlerin iç açılar toplamından yararlanarak adım adım hesaplayınız.

b) Mühendisler A ve C köşeleri arasındaki açı farkını (64°) sabit tutup, C açısını 10° büyüterek platformu yeniden tasararlarsa, robotik kolun kalibrasyon açısı olan y değeri bu değişimden nasıl etkilenir? Varsayımınızı matematiksel olarak gerektiriniz.

Örnek...9 :

ABCD dörtgeninde A, D, E doğrusal [DK] ve [BK] açıortaydır. Verilenlere göre, $m(\widehat{BKD})=\theta$ kaç derecedir?

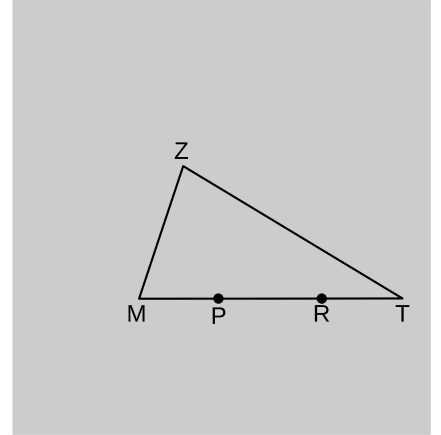
**Örnek...10 :**

MTZ üçgeni şekilde kâğıt üzerine çizilmiştir.

$P, R \in [MT]$. Kağıt ZM boyunca katladığında R noktasının kâğıtta karşılık geldiği nokta S; ZT boyunca katladığında P noktasının kâğıtta karşılık geldiği noktayı F dir.

SMTF dörtgeninde $MT \parallel SF$ ve

$m(\widehat{MSF}) + m(\widehat{SFT}) = 200^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{MZT})$ kaçtır?

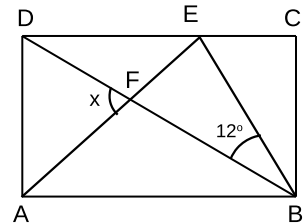
**Örnek...11 :**

Tabloda dörtgenlere göre açı özelliklerini daima doğru olacak şekilde doldurunuz

	İç açı toplamı	Dış Açı toplamı	İç açıları eşittir	Karşılıklı açıları eşittir	Komşu iç açılar bütündür
Paralelkenar					
Eşkenar Dörtgen					
Dikdörtgen					
Kare					
Yamuk					
Dik Yamuk					
İkizkenar yamuk					
Deltoid					

Örnek...12 :

ABCD dikdörtgen $|AB| = |BE| = 2 \cdot |EC|$
 $m(\widehat{DBE}) = 12^\circ$ ise
 $m(\widehat{AFD}) = x$ kaç derecedir?



Örnek...13 :

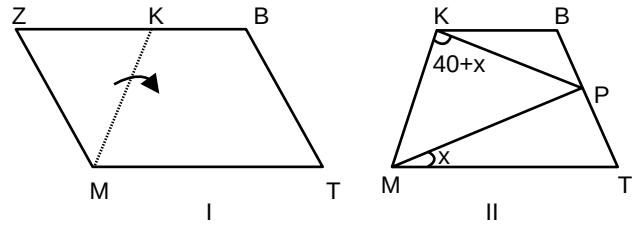
Bir restorasyon mimarı, geleneksel Selçuklu mimarisindeki taş süslemelerini ve çini desenlerini inceleyerek bir yüzey kaplama tasarımı hazırlıyor. Mimar, motifin merkezini oluşturmak için bir eşkenar dörtgen (MTBZ) ve bu dörtgenin taban kenarını ortak kullanan bir eşkenar üçgen (MTK) motifi tasarlayıp bunları iç içe yerleştiriyor.

Görsel estetiği korumak adına desenler yerleştirilirken $m(\angle KMZ) = 40^\circ$ olacak şekilde bir açısal hizalama yapılıyor. Çini ustası, desenin üst birleşim noktalarını sabitlemek için K noktasından B köşesine doğrusal bir bağlantı çıtası çekiyor.

Sizden istenenler:

a) Süsleme sanatında simetri ve kenar eşitlikleri hayati önem taşır. Tasarımdaki eşkenar dörtgen ve eşkenar üçgenin kenar özelliklerini (gizli ikizkenar üçgenleri) analiz ederek, bağlantı çıtasının üst kenarla yaptığı $m(\angle KBZ) = x$ açısını adım adım hesaplayınız.

b) Mimar, motifi daha dar bir alana sığdırmak amacıyla MTBZ eşkenar dörtgeninin M açısını küçülterek deseni yeniden tasarlasaydı (40° açı küçülseydi), x açısının ölçüsü nasıl değişirdi? Çıtadaki bu açısal değişimin yönünü formülsüz, mantıksal olarak yorumlayınız.

Örnek...15 :

Yukarıda I şeklinden görülen MTBZ paralelkenarının ZM kenarı MK doğru parçası boyunca katlandığında Z noktası BT kenarı üzerindeki P noktasına gelerek şekil II oluşuyor. $m(\angle MKP) = m(\angle TMP) + 40$ ve $m(\angle MPK) = 5 \cdot m(\angle TMP) + 10$ olduğuna göre $m(\angle TBZ)$ kaçtır?

Örnek...14 :

ABCD yamuk

$[AB] \parallel [CD]$

$|BC| = |CE|$

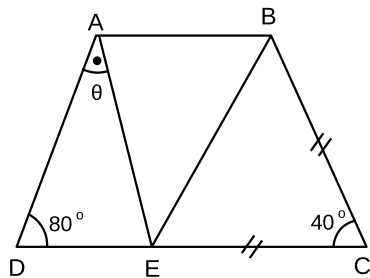
$|AE| = |BE|$

$m(\angle ADC) = 80^\circ$

$m(\angle BCE) = 40^\circ$

olduğuna göre,

$m(\angle DAE) = \theta$ kaç derecedir?



DÖRTGENLERDE UZUNLUK BAĞINTILARI

Örnek...16 :

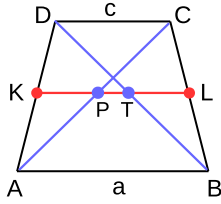
Tabloda dörtgenlere göre kenar özelliklerini daima doğru olacak şekilde doldurunuz

	Tüm kenarlar eşittir	Karşılıklı kenarlar eşittir	Karşılıklı kenarlar paraleldir
Paralelkenar			
Eşkenar Dörtgen			
Dikdörtgen			
Kare			
Genel Yamuk			
Dik yamuk			
İkizkenar yamuk			
Deltoid			

YAMUKTA ORTA TABAN

ABCD yamuğunda, K ve L kenarlarının orta noktaları olmak üzere, [KL] orta tabandır. [KL]'nu yamuğun alt tabanı (a) ve üst tabanı (c) türünden elde ederek genellemeyi tamamlayınız. (üçgende benzerlik kavramından yola çıkınız.)

$$|KL| = \dots$$

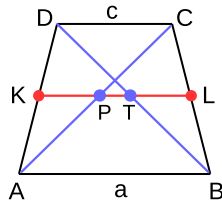


İspat

Örnek...17 :

Yandaki yamukta [KL] orta tabandır. Buna göre,

i) P ve T noktalarının üzerinde bulundukları köşegenlere göre konumları hakkında varsayımlarda bulununuz.

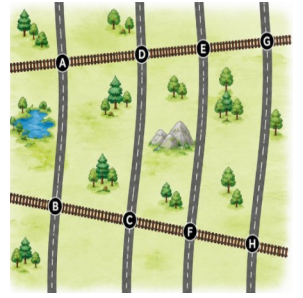


ii) P ve T noktalarının köşegenler üzerindeki konumlarından hareketle, |PT| uzunluğunu alt taban (a) ve üst taban (c) cinsinden elde ederek genelleme tamamlayınız.

$$|PT| = \dots$$

Örnek...18 :

Bir bölgede kuzey-güney doğrultusunda uzanan dört ana otoyol birbirine paraleldir. Bu otoyollar üzerinde bulunan şehirler iki farklı demiryolu hattı ile birbirine bağlanmaktadır. Üst demiryolu hattı üzerinde sırasıyla doğrusal konumda A, D, E ve G şehirleri; alt demiryolu hattı üzerinde ise doğrusal konumda B, C, F ve H şehirleri bulunmaktadır.



Yapılan ölçümlerde:

- H ile G şehirleri arasındaki mesafe 600 km,
- E ile F şehirleri arasındaki mesafe 450 km,
- $|BC| = |CF| = |FH|$

olarak bilinmektedir.

Buna göre, A ile B şehirleri arasındaki mesafe D ile C arasındaki mesafeden kaç kilometre azdır?

DÖRTGENLERDE KÖŞEĞEN ÖZELLİKLERİ

Örnek...19 :

Tabloda dörtgenlere göre kenar özelliklerini daima doğru olacak şekilde doldurunuz

	Köşegenler uzunlukları eşittir	Köşegenler birbirini ortalar	Köşegenler birbirine diktir.	Köşegenler açıortaydır
Paralelkenar				
Eşkenar Dörtgen				
Dikdörtgen				
Kare				
Genel Yamuk				
Dik yamuk				
İkizkenar yamuk				
Deltoid				

Örnek...20 :

Bir dörtgen çiziliyor. Köşegenlerin birbirini ortalamadığı görülüyor. Bu bilgi tek başına dörtgenin paralelkenar olduğunu söylemek için yeterli midir? Gerekçelendiriniz.

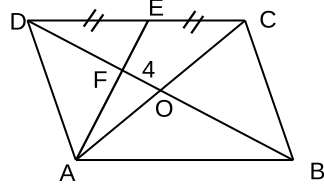
Örnek...21 :

Bir öğrenci "Köşegenleri eşit olan her dörtgen dikdörtgendir." iddiasında bulunuyor. Bu iddiayı değerlendiriniz. Karşı örnek veriniz.

Örnek...22 :

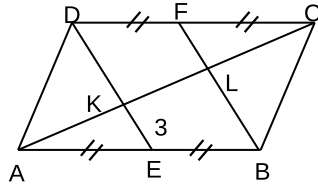
ABCD paralelkenar, E orta nokta ve O köşegenlerin kesim noktasıdır.

$|OF| = 4$ cm ise $|BD|$ kaç cm dir?

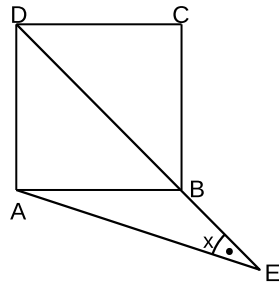
**Örnek...23 :**

ABCD paralelkenar, [AC] köşegen

E ve F bulundukları kenarların orta noktası ve $|KE| = 3$ cm ise $|BF|$ kaç cm dir?

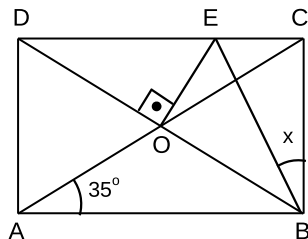
**Örnek...24 :**

ABCD bir karedir. $|AE| = |BD|$ ise $m(\widehat{AED}) = x$ kaç derecedir?

**Örnek...25 :**

ABCD dikdörtgeninde O köşegenlerin kesim noktasıdır. $[BD] \perp [EO]$

$m(\widehat{BAC}) = 35^\circ$ ise $m(\widehat{CBE}) = x$ kaç derecedir?

**Örnek...26 :**

Bir mobil strateji oyununda, kare şeklindeki bir haritanın (ABCD) köşelerinde dört farklı oyuncunun kalesi bulunmaktadır.

¶ D kalesinden B kalesine uzanan doğrusal bir güvenli ticaret yolu ([BD] köşegeni) inşa edilmiştir.

¶ A kalesindeki oyuncu, bu ticaret yolunu gözetlemek amacıyla yol üzerindeki bir E noktasına askeri bir karakol kuruyor.

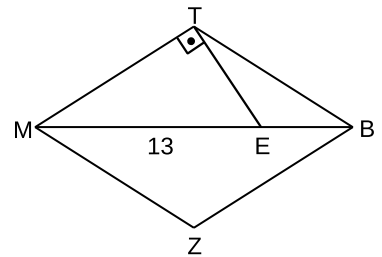
¶ Karakolun B kalesine olan uzaklığı 11 br, D kalesine olan uzaklığı ise 5 br olarak ölçülmüştür.

Buna göre:

- Karakolun A kalesine olan kuş uçuşu uzaklığını ($|AE| = x$) bulmak için, kare haritanın köşegen özelliklerini (diklik ve ortalama ilişkilerini) kullanabileceğiniz ek bir hat çiziniz. Bu doğrultuda oluşan dik üçgenlerden yararlanarak x değerini adım adım hesaplayınız.
- Karakol B kalesine daha yakın olacak şekilde ticaret yolu ([BD]) üzerinde aşağıya doğru kaydırılsaydı (yani $|BE|$ uzunluğu küçülürken $|DE|$ uzunluğu büyüseydi), karakolun A kalesine olan uzaklığı (x) nasıl değişirdi? Hareket boyunca x'in alabileceği en küçük değer hangi geometrik durumda gerçekleşirdi? Yorumlayınız.

Örnek...27 :

[BM], MTBZ eşkenar dörtgeninin köşegeni, TEM dik üçgen ve $MT \perp ET$ dir. $|ME| = 13$ br $|BE| = 5$ br olduğun göre, $|TE|$ kaç birimdir?



Örnek...28 :

Bir inşaat firması, dikdörtgen biçimindeki bir hangar kapısının ABCD rüzgâra karşı dayanıklılığını artırmak amacıyla çelik destek profilleri kullanmaktadır. Yüksekliği [BC] olan kapının köşeleri aşağıdaki gibi saat yönünde adlandırılmıştır.

¶ ABCD bir dikdörtgendir.

¶ Kapının içindeki ana destek profili [AC]'dir.

¶ B köşesinden kapının dışındaki hidrolik mekanizmanın bağlantı noktası olan E noktasına [BE] hidrolik kolu bağlanmıştır.

¶ Kapının dış tarafında bulunan E noktası, D ve C noktalarının oluşturduğu üst kenarın dışındaki hidrolik mekanizmanın bağlantı noktasıdır.

¶ E noktası, D noktasından geçen ve DC kenarıyla **sabit x açısı** yapan [DE] destek profili üzerindedir.

¶ Tasarım gereği $|AC|=|BE|$ ve $m(\angle BAC)=m(\angle CBE)$ olacak şekilde sistem ayarlanmıştır.

¶ Kapının dışındaki DE profili, mekanizmanın tasarımı gereği **kapının genişliği değişse bile aynı doğrultuda tutulmaktadır**. Bu nedenle $m(\angle EDC)=x$ sabit kalmaktadır.

Buna göre x kaçtır?

Örnek...29 :

ABCD dörtgeninde,

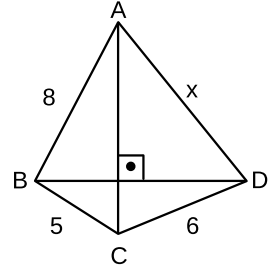
$[AC] \perp [BD]$,

$|AB|=8$ cm

$|BC|=5$ cm ve

$|CD|=6$ cm ise

$|AD|=x$ kaç cm dir?

**Örnek...30 :**

ABCD dörtgeninde,

$[AC] \perp [BD]$,

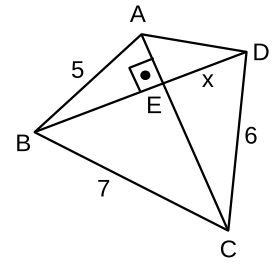
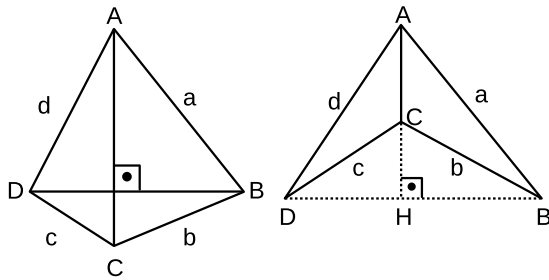
$|AB|=5$ cm,

$|BC|=7$ cm,

$|CD|=6$ cm ve

$|AE|=2\sqrt{2}$ cm ise

$|ED|=x$ kaç cm dir?

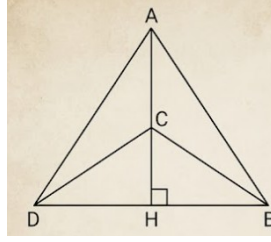
**KÖŞEĞENLERİ DİK KESİŞEN DÖRTGEN :**

ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ ise $a^2+c^2=b^2+d^2$ eşitliği sağlanır.

İspat

Örnek...31 :

Matbaz Tasarım Atölyesi, rüzgâr direncini en aza indirmek için köşegenleri dik kesişen ABCD içbükey (konkav) dörtgeni formunda profesyonel bir uçurtma tasarlıyor.



Uçurtmanın ana iskeletini, taşıyıcı omurga olan AC köşegenini taşıyan [AH] doğrultusu ile kanat açıklığını sağlayan [BD] (dışsal köşegen [BD]) çitası oluşturmakta ve bu iki çita aerodinamik denge için birbirine dik ([AH] $\perp$ [BD]) kesilmektedir.

Kanat gerginliğini sağlayan dış iplerden $|AB| = 8$ br ve iç denge ipi $|CD| = 6$ br olarak sabitlenmiştir.

Uçuş dengesini simetrik olmayan bir yapıda kurmak amacıyla sol üst kenar ([AD]), sağ alt kenarın ([BC]) tam 3 katı uzunluğunda olacak şekilde kalibre edilmiştir.

Buna göre:

a) Doğrudan hazır kural kullanmak yerine; kesişim noktası H'de oluşan dik üçgenlerde Pisagor teoremini uygulayınız. Buradan yola çıkarak köşegenleri dik kesişen dörtgenlerdeki $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$ genellemesini ispatlayınız ve kurduğunuz denklemi çözerek |AD| uzunluğunu hesaplayınız.

b) Uçurtmanın rüzgâr tutuş açısını değiştirmek için C bağlantı düğümü, uçurtmanın içbükey formu bozulmayacak şekilde omurga ([AH]) üzerinde aşağıya, yani H noktasına doğru kaydırılsaydı; iskeletin diklik durumu ve kanat açıklığı ([BD]) değişmediğinde |CD| ve |BC| ip uzunlukları bu durumdan nasıl etkilenirdi? Geometrik olarak yorumlayınız.

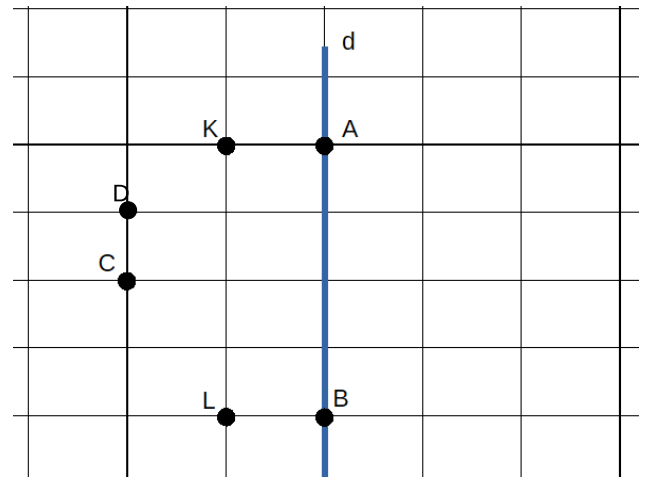
DÖRTGENLERDE SİMETRİ ÖZELLİKLERİ**Örnek...32 :**

Aşağıda birim kareli zemin üzerinde çizilmiş bir d doğrusu ve işaretlenmiş bazı noktalar verilmiştir. Verilen işlem basamaklarını uygulayarak soruları cevaplayınız.

i) ABC üçgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz dörtgeni tanımlayınız.

ii) ABD üçgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz dörtgeni tanımlayınız.

ii) ABLK dörtgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz dörtgeni tanımlayınız.

**Örnek...33 :**

Tabloda dörtgenlere göre kenar özelliklerini daima doğru olacak şekilde doldurunuz

	Köşegenler simetri eksenidir	Karşılıklı paralel kenarlarının orta noktalarından simetri eksenini geçer.	Simetri eksenini sayısı
Paralelkenar			
Eşkenar Dörtgen			
Dikdörtgen			
Kare			
Genel Yamuk			
Dik yamuk			
İkizkenar yamuk			
Deltoid			

Örnek...34 :

Bir dörtgenle ilgili aşağıdaki bilgileri vermiştir.

I . Dörtgenin dört simetri eksenine sahiptir.

II . Simetri eksenlerinden oluşan küme

$S=\{12,a\}$ kümesidir

Buna göre, dörtgenin çevresi en çok kaç birim olur?

Örnek...35 :

Bir dörtgenle ilgili aşağıdaki bilgileri vermiştir.

I . Dörtgenin en az iki simetri eksenine sahiptir.

II . Dörtgenin kenar uzunlukları eşit ve 10'ar cm'dir.

III. Simetri eksenlerinden birinin dörtgen içinde kalan parçasının uzunluğu 16 cm'dir.

Buna göre dörtgenin köşegen uzunlukları toplamının kaç cm olduğunu bulunuz