BAYES TEOREMİ

Bayes teoremi, 18. yüzyıl İngiliz matematikçisi Thomas Bayes'in adını verdiği olasılıkta bir olay hakkında **yeni bir bilgi elde ettiğimizde** olasılığı nasıl güncelleyeceğimizi gösteren temel bir kuraldır.

Genel bağıntı: $P(A|B)=\dfrac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$

Örnek...1 :

Elimizde A ve B olarak adlandırılmış iki farklı kutu bulunmaktadır.
Kutu A: 3 kırmızı, 1 mavi top
Kutu B: 1 kırmızı, 3 mavi top
Kutuların herhangi birinden seçme olasılığının eşit olduğu bilinmektedir.
Buna göre, rastgele bir kutu seçildiğinde çekilen top kırmızıysa, seçilen kutunun A olma olasılığı kaçtır?

Kutuların seçilmesi $P(A)=\frac{1}{2}=P(B)$

$P(\text{Kırmızı}|A)=3/4$

$P(\text{Kırmızı}|B)=\frac{1}{4}$

Top kırmızı geldiğine göre, A kutusundan gelme olasılığı
$P(A|\text{Kırmızı})$

$$P(A|K)=\frac{P(A\cap K)}{P(K)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

Örnek...2 :

Bir okulda:

- Öğrencilerin %60'ı kız, %40'ı erkek
- Kızların %30'u matematikten 90 üstü alıyor
- Erkeklerin %20'si matematikten 90 üstü alıyor

Buna göre, bu okulda matematikten 90 üstü alan bir öğrencinin kız olma olasılığı kaçtır?

	Kız	Erkek
>90	18x	8x
<90	42x	32x
Toplam	60x	40x

$P(K)=\frac{6}{10}$

$P(E)=\frac{4}{10}$

$P(>90|K)=\frac{3}{10}$

$P(>90|E)=\frac{2}{10}$

İstenen $P(K|>90)$

$$P(K|>90)=\frac{P(K\cap >90)}{P(>90|K)P(K)+P(>90|E).P(E)}$$

$$=\frac{0,3\cdot 0,6}{0,3\cdot 0,6+0,2\cdot 0,4}=\frac{9}{13}$$

Örnek...3 :

Masa örtüsü üreten bir fabrikada üretim bandındaki örtülerin rengi kırmızı , beyaz, sarı ve mordur.
Üretim sonunda, kırmızı örtülerin yüzde 5'inin , beyaz örtülerin %10'unun, sarı ve mor örtülerin ise %20'sinin üretim hatası içerdiği ortaya çıkmıştır. Bu fabrikada bir günde 300 kırmızı, 400 beyaz, 500 ve 250 mor örtü üretilmiştir. Üretilen örtüleri denetleyen uzman, örtülerin içinden bir örtü seçtiğinde alınan örtünün üretim hatası içerdiği bilindiğine göre bu ürünün mor renkli olma olasılığını hesaplayınız.

	Hatalı ürün sayısı
Kırmızı	15
Beyaz	40
Sarı	100
Mor	50

Toplam hatalı ürün sayısı = 205

$$P(\text{Mor}|\text{Hatalı})=\frac{\text{Mor ve hatalı}}{\text{Toplam hatalı}}=\frac{50}{205}$$

$$=\frac{10}{41}$$

Örnek...4 :

Bir hastalığın toplumdaki görülme oranı %2 dir. Hastalığı teşhis için kullanılan test hasta olan bireylerde %95 oranında, sağlıklı olan bireylerdeyse %5 oranında pozitif sonuç vermektedir. Test sonucu pozitif çıkan bir kişinin gerçekten hasta olma olasılığı kaçtır?

$P(H)=0,02$ (hasta) $P(S)=0,98$ (sağlıklı) $P(+|H)=0,95$ (hastada +) $P(+|S)=0,05$ (sağlıklı da +)

İstenen $P(H|+)=\dfrac{P(+|H).P(H)}{P(+|H)P(H)+P(+|S).P(S)}=$

$$=\frac{0.95.0,02}{0.95.0,02+0,05.0,98}=\frac{19}{68}\approx \%28$$

Örnek...5 :

Gazete okuyan Halit o ay içinde bir günün yağmurlu olma olasılığının yüzde 30, sabahtan bulutlu bir günde yağmur yağma olasılığının yüzde 80 ve sabahtan bulutsuz bir günde yağmur yağma olasılığının yüzde 20 olduğunu okumuştur. Bir gün , yağmur yağmışsa bulutlu olma olasılığı kaçtır?

$P(Y) = 0{,}3 \quad P(Y|B) = 0{,}8 \quad P(Y|B') = 0{,}2$

$P(Y) = P(Y|B).P(B) + P(Y|B').P(B')$

$0{,}3 = 0{,}8.P(B) + 0{,}2.\underbrace{P(B')}_{1-P(B)}$

$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$

istenen $P(B|Y) = \frac{P(Y|B).P(B)}{P(Y)}$

$= \frac{0{,}8 \cdot 1/6}{0{,}3} = \frac{4}{9}$

Örnek...6 :

Bir fabrikada ürünler iki makinede üretiliyor:

- Makine A: Ürünlerin %60'ını üretiyor, hatalı üretim oranı %5
- Makine B: Ürünlerin %40'ını üretiyor, hatalı üretim oranı %10

Buna göre Rastgele seçilen hatalı bir ürünün, Makine A'dan çıkma olasılığı kaçtır?

$P(A) = 0{,}6 \quad P(B) = 0{,}4$

$P(H|A) = 0{,}05$

$P(H|B) = 0{,}1$

istenen $P(A|H) = \frac{P(H|A).P(A)}{P(H|A).P(A) + P(H|B).P(B)}$

$= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}6}{0{,}05 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}4} = \frac{3}{7}$

Örnek...7 :

Bir torbada , 1 adil zar ile 6 gelme olasılığı yüzde elli olan 1 hileli zar bulunmaktadır.

Rastgele bir zar seçiliyor atılıyor ve 6 geliyor. Buna göre, seçilen zarın hileli olma olasılığı kaçtır?

$\underset{\text{hileli}}{P(H)} = \underset{\text{adil}}{P(A)} = \frac{1}{2}$

$P(6|A) = 1/6 \quad P(6|H) = \frac{1}{2}$

istenen $P(H|6) = \frac{P(6|H).P(H)}{P(6|H).P(H) + P(6|A).P(A)}$

$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = 3/4$

Örnek...8 :

Bir okulda:

- Öğrencilerin %50'si mebi ile sınava hazırlanıyor
- mebi ile sınava hazırlananların %80'i sınavı geçiyor
- mebi ile sınava hazırlanmayanların %40'ı sınavı geçiyor

Buna göre sınavı geçen bir öğrencinin mebi ile hazırlanmış olma olasılığı kaçtır?

$\underset{\text{mebiyle}}{P(M)} = \frac{1}{2} \quad P(\underset{\text{geçmesi}}{G}|M) = \frac{8}{10} \quad P(M') = \frac{1}{2}$

$P(G|M') = 4/10$

istenen $P(M|G) = \frac{P(G|M).P(M)}{P(G|M).P(M) + P(G|M').P(M')}$

$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}5} = \frac{2}{3}$