Günlük hayatta sıkça karşılaşılan ve sonucu henüz kesinleşmemiş olaylar hakkında tahminlerde bulunuruz. Bu tür durumlarda doğru kararlar verebilmek için geçmişte yaşanan benzer olayları inceler ve bu olayların gerçekleşme sıklıklarına bakarak değerlendirmeler yaparız. **Olasılık**, bir olayın gerçekleşme ihtimalini sayısal olarak ifade eden ve belirsizlik içeren durumları anlamamıza yardımcı olan bir matematik kavramıdır.

KOŞULLU OLASILIK:

Bir E örnek uzayının herhangi iki olayı A ile B olsun. B olayının gerçekleşmiş olması halinde, A olayının olasılığına, "A olayının B ye bağlı koşullu olasılığı " denir ve bu olasılık P(A|B) ile gösterilir.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

E uzayı eş olumlu ise $P(A|B)=\dfrac{s(A\cap B)}{s(B)}$

Örnek...1 :

A ve B aynı örnek uzayın olayları olmak üzere, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ ve $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ olduğuna göre,

a) $P(A|B)$ kaçtır? b) $P(B|A)$ kaçtır?

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}$

a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/12}{1/4}=1/3$

b) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1/12}{1/3}=\dfrac{1}{4}$

Örnek...2 :

Düzgün bir zarın havaya atılması deneyinde tek sayı geldiği bilindiğine göre, bu sayının asal sayı olması olasılığı kaçtır?

$E'=\{1,3,5\}$ $A=\{3,5\}$

$P(A)=\dfrac{2}{3}$

Örnek...3 :

Bir çift zarın atılması deneyinde zarlardaki sayılar toplamının 8 olduğu bilindiğine göre bu sayıların ikisinin de çift sayı olması olasılığı kaçtır?

$E'=\{(5,3),(3,5),(6,2),(2,6),(4,4)\}$

$A=\{(6,2)(2,6)(4,4)\}$

$P(A)=3/5$

Örnek...4 :

Bir sınıfta 18 erkek 12 kız öğrenci vardır. Bu sınıfta kızların 3te biri ,erkeklerinse yarısı müzik dersini seçmemiştir. Buna göre

a) Sınıftan seçilen bir öğrencinin kız öğrenci olduğu bilindiğine göre , müzik dersi seçmiş olma olasılığı kaçtır?

b) Sınıftan seçilen bir öğrencinin müzik dersi seçmiş olduğu bilindiğine göre kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

	M+	M−
Kız	8	4
Erkek	9	9

a) $P(M+|K)=\dfrac{8}{12}=2/3$

b) $P(K|M+)=\dfrac{8}{17}$

Örnek...5 :

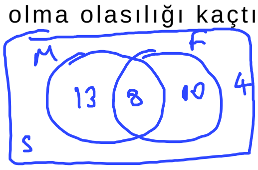
A = {1,2,3,4,5,6,7,8 } kümesinin alt kümeleri birer karta yazılıp, bir kutuya konuyor. Bu kutudan rastgele bir kart çekiliyor. Çekilen kartta kümenin 3 elemanlı bir küme olduğu bilindiğine göre, bu kümede 4'ün bulunma olasılığı kaçtır?

$s(E)=\binom{8}{3}$ $s(A)=\binom{7}{2}$

$P(A)=\dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}}=\dfrac{21}{56}=\dfrac{3}{8}$

Örnek...6 :

35 kişilik bir sınıfta, matematikten geçenlerin sayısı 21, fizikten geçenlerin sayısı 18 ve her iki dersten de geçenlerin sayısı 8 dir. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin matematikten kalan bir öğrenci olduğu bilindiğine göre fizikten geçen bir öğrenci olma olasılığı kaçtır?



$P(A)=\dfrac{10}{14}=\dfrac{5}{7}$

Örnek...7 :

Haldun elindeki 3 madeni parayı havaya atarak bir deney yapacak ve paraların en az ikisi yazı gelirse pencereyi açacaktır. Deney sonunda Haldun'un pencereyi açtığı bilindiğine göre, paraların üçününde yazı gelmiş olma olasılığı kaçtır? Çözümü yaparken ağaç diyagramından faydalanınız.

en az ikisi yazı gelmiş $\underbrace{YYT, TYY, YTT, YYY}_{E}$

$P(A)=\dfrac{1}{4}$

ÇARPMA KURALI

E bir eş olumlu örnek uzay ve A ve B bu örnek uzayın iki olayı olmak üzere,
$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ koşullu ifadesi tekrar düzenlenerek $P(A\cap B)=P(A|B).P(B)$ yazılarak çarpım kuralı elde edilir.

Örnek...8 :

Bir sınıfta 10 kız, 6 erkek öğrenci vardır. Sınıftan ard arda iki öğrenci seçiliyor. Birincinin kız ve ikincinin erkek olma olasılığı kaçtır? (İkinci kişi kalan kişiler arasından seçiliyor)

I.Yol $P(A\cap B)=\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}=\frac{60}{240}=\frac{1}{4}$
1.kız 2.erkek

II.Yol 1kız 1erkek $\left[\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}}\right]\cdot\frac{1}{2}=\frac{60}{120}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
sıralama KE, EK yüzünden

Örnek...9 :

6 yüzücü, 4 koşucu arasından 2 kişi seçilecektir. Bu iki kişinin de yüzücü olması olasılığı kaçtır?

$P(Y_1\cap Y_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$
1.yüzücü 2.yüzücü

II.Yol $\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ (YY sıralaması tektir)

Örnek...10 :

Bir grupta 5 kız ve 3 erkek öğrenci vardır. Gruptan seçilecek 3 kişinin de kız olma olasılığı kaçtır?

I.Yol $P(K_1\cap K_2\cap K_3)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{60}{56.6}=\frac{5}{28}$

II.Yol $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$ (KKK tek sıralama)

Örnek...11 :

5 kız, 5 erkek öğrenci arasından rastgele 2 öğrenci seçilirse,
a) öğrencilerden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı kaçtır?
b) öğrencilerden birincinin kız, ikincinin erkek olma olasılığı kaçtır?

a) 1kız 1erkek $\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$

II.Yol $\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=5/9$

b) $P(K_1\cap E_2)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$

II.Yol $\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$
KE EK sıralaması sebebiyle

Örnek...12 :

Bir kutuda 4 kırmızı, 3 mavi bilye vardır. Bu torbadan ard arda ve seçilen tekrar geri konmamak koşuluyla 4 bilye alınıyor. Bunlardan ilk ikisinin kırmızı, diğerlerinin mavi olasılığı kaçtır?

$P(K_1\cap K_2\cap M_1\cap M_2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{72}{840}=\frac{3}{35}$

II.Yol $\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{4!}{2!2!}}=\frac{6.3}{35}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{35}$
KKMM sıralaması

Örnek...13 :

Her birinde 2 yeşil, 4 sarı top bulunan iki torbanın birincisinden bir top alınıp ikincisine ve sonra ikincisinden bir top alınıp birincisine konulduğu zaman, renk bakımından ilk durumu elde etme olasılığı kaçtır?

2Y 4S   2Y 4S
S → S
Y → Y

$P(S_1\cap S_2)+P(Y_1\cap Y_2)$
$\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$

BAĞIMSIZ OLAYLAR

İki olaydan herhangi birinin olasılığı diğer olayın gerçekleşmesine bağlı olarak değişmiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar, değişiyorsa bağımlı olaylar denir.

Örnek...14 :

Aşağıdaki olasılık sorularında A olayını (olayların biri) ve B olayını (olayların diğeri) yazarak olayların bağımlımı bağımsız mı olduğunu belirtiniz.

Soru 1 Hedefi vurma olasılıkları sırasıyla ¾ ve ½ olan Ali ve Barkut'un atış yapmaktadırlar. Buna göre hedefi yalnızca Barkut'un vurma olasılığı kaçtır?
A: Ali'nin hedefi vurma olayı
B: Barkut'un hedefi vurma olayı
Olaylar bağımlıdır/ bağımsızdır

Soru 2 bir torbada renkleri dışında özdeş 3 mavi 5 kırmızı bilye vardır. Geri konulmamak şartıyla art arda seçilen toptan birincinin mavi ikincinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?
A: Birinci bilyenin mavi olması
B: İkinci bilyenin kırmızı olması
Olaylar bağımlıdır/ bağımsızdır

A ve B aynı örnek uzayın olayları olmak üzere P(A∩B)=P(A).P(B) ise A ve B olaylarına bağımsız olaylar denir.

Örnek...15 :

Hilesiz bir sayı küpü havaya atılıyor.
A olayı: Üst yüze gelen sayının 2'den büyük olması olayı,
B olayı : Üst yüze gelen sayının çift sayı olma olayı
olmak üzere A ve B olayları bağımsız olaylar mıdır?

$A=\{3,4,5,6\}$ $B=\{2,4,6\}$

$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(A)=4/6$, $P(B)=\frac{3}{6}$ > $P(A).P(B)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

$P(A\cap B)=P(A).P(B) \Rightarrow$ olaylar bağımsızdır.

Örnek...16 :

Düzgün bir para ile düzgün bir zar birlikte atılıyor. Paranın tura ve zarın çift sayı gelme olasılığı kaçtır?

I.Yol $P(T\cap Ç)=P(T).P(Ç)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

II.Yol $E=\{(T,1),(T,2)\ldots,(T,6),(Y,1),(Y,2)\ldots(Y,6)\}$

$A=\{(T,2)(T,4)(T,6)\}$

$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Örnek...17 :

Bir kutuda 2 si bozuk 5 kalem, ikinci bir kutuda 3 ü bozuk 7 kalem vardır. Kutulardan birer kalem alınıyor. İki kaleminde sağlam olması olasılığı kaçtır?

$P(S_1\cap S_2)=P(S_1).P(S_2)$

$\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{49}$

Örnek...18 :

2 yüzü mavi, 3 yüzü kırmızı ve diğer yüzü sarı olan bir zar ard arda 3 kez atılıyor. Üst yüze gelen rengin üç defa mavi gelme olasılığı kaçtır?

$P(M_1\cap M_2\cap M_3)=P(M_1).P(M_2).P(M_3)$

$=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{216}=\frac{1}{27}$

Örnek...19 :

Düzgün bir para 4 defa atıldığında en az bir tura gelme olasılığı kaçtır?

$A'=$ hiç tura gelme durumu $=YYYY$ $s(E)=2^4=16$

$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

Örnek...20 :

İki torbadan birinde 3 kırmızı, 3 mavi ve diğerinde 5 kırmızı 3 mavi bilye vardır. Rastgele seçilen bir torbadan yine rastgele seçilen bir bilyenin kırmızı olması olasılığı kaçtır?

torba seçim olasılığı $\frac{1}{2}$ dir

$P(K|I)+P(K|II)$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}=\underset{(4)}{\frac{3}{12}}+\underset{(3)}{\frac{5}{16}}=\frac{27}{48}$

Örnek...21 :

Bir hedefe atış yapan Ali'nin hedefi vurma olasılığı 4/5, Ayşe'nin hedefi vurma olasılığı 2/3 olduğuna göre, yapılan birer atış sonunda
a) sadece Ali'nin hedefi vurma olasılığı kaçtır?
b) hedefin vurulmuş olma olasılığı kaçtır?

a) $P(Ali\cap Ayşe')=\frac{4}{5}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$

b) 1 − hedefin vurulmama olasılığı $=1-\underbrace{\left(1-\frac{4}{5}\right)}_{\text{Ali vuramaz}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{2}{3}\right)}_{\text{Ayşe vuramaz}}=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{14}{15}$

II.Yol sadece Ali + sadece Ayşe + her ikisi de $=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{14}{15}$ bu

Örnek...22 :

Bir zar ile bir madenî para birlikte atılıyor.
a) Oluşabilecek durumları ağaç diyagramı ile gösteriniz.
b) Paranın yazı ve zarın tek sayı gelme olasılığını hesaplayınız
c) Paranın yazı veya zarın tek sayı gelme olasılığını hesaplayınız

a) T → 1, 2, 3, 4, 5, 6
Y → 1, 2, 3, 4, 5, 6

b) $P(Y\cap T)$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$

II.Yol $A=\{(Y,1),(Y,3),(Y,5)\}$

$s(E)=12$

$P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

c) $P(Y\cup T)$

$P(Y)+P(T)-P(Y\cap T)$

$\frac{1}{2}+\frac{3}{6}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

II.Yol $A=\{(Y,1)(Y,2)\ldots(Y,6),(T,1),(T,3),(T,5)\}$

$s(A)=9$, $s(E)=12$

$P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

Örnek...23 :

Bir madeni para 3 defa atılıyor. Bir ağaç diyagramı çizerek üç paranın tam olarak ikisinin aynı gelme olasılığını hesaplayınız.

T → T → T: TTT
T → T → Y: TTY ✓
T → Y → T: TYT ✓
T → Y → Y: TYY ✓
Y → T → T: YTT ✓
Y → T → Y: YTY ✓
Y → Y → T: YYT ✓
Y → Y → Y: YYY

$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

II.Yol $s(E)=2^3=8$ durum

$A=$ YTT ve sıralanışları $\frac{3!}{2!}=3$ + YYT ve sıralanışları $\frac{3!}{2!}=3$ → 6 durum

$P(A)=6/8=\frac{3}{4}$

Örnek...24 :

Bir torbada üzerinde 1'den 9'a kadar numaraların bulunduğu özdeş 9 adet kart vardır. Çekilen kart <u>geri atılmak</u> koşulu ile torbadan art arda iki kart çekildiğinde birinci kartın üzerindeki sayının 7'den küçük, diğerinin 3 pozitif bölenli bir sayı olma olasılığını bulunuz.''

A: Birinci kart 7'den küçük 1,2,3,4,5,6

B: İkinci kart PBS=3 → sayı x^2 şeklinde olmalı (sadece 4, 9)

$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{27}$