SEÇME-KOMBİNASYON

Belirli bir grup içerisinden kaç farklı seçim yapılabileceğini belirlemek karar verme süreçlerinde büyük önem taşır.

Örnek...1 :

A = { x, y, z} kümesinin 2 elemanlı permütasyonları (sıralamaları) ile 2 elemanlı kombinasyonlarını (seçimleri-alt kümeleri) karşılaştırınız.

2'li permütasyonları
xy
xz
yz
yx
zx
zy
sıra önemli

2'li kombinasyonları
{x,y} {x,z} {y,z}
sıra önemsiz

Örnek...2 :

Haldun bir dondurmacıda bulunan 4 farklı çeşitten (Fıstıklı, Çikolatalı, Kavunlu ve Böğürtlenli) 3 tanesini seçerek külah dondurmasını oluşturacaktır.
Buna göre, Haldun dondurmasını içerik bakımından kaç farklı şekilde oluşturabilir? Soruyu çözerken çizge yöntemi ve listeleme yönteminden faydalanınız.

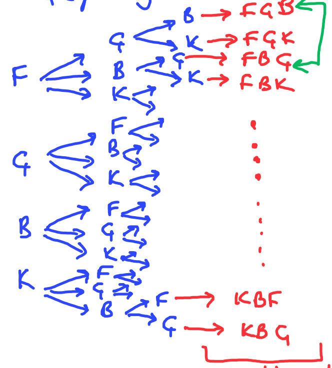
a)

	1. seçim	2. seçim	3. seçim
1	F	Ç	K
2	F	K	Ç
3	K	Ç	F
⋮	⋮	Ç	B
⋮	F	K	B
⋮	F	K	B
24	B	K	Ç

→ 3!=6 farklı şekilde
B → 6 sıralama
B → 6 sıralama
B → 6 sıralama

toplamda 24 satır ama gerçekte 4 farklı içerik oluşur

b) Çizge yöntemiyle

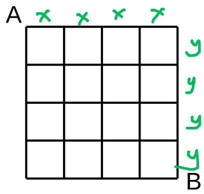


içerik olarak aynı olduğunu farkediniz bu içerik 3!=6 defa tekrarlanır

24 farklı satır (sıralama)

dondurma toplarının sırasının oluşturulan dondurmaya bir etkisi yoktur. 24 farklı sıralama olmasına rağmen gerçekte içerik olarak 6 çeşit dondurma içeriği oluşur. Çeşit sayısını tüm sıralamaları her bir durumun (3!) sayısına bölerek bulabiliriz. Çeşit sayısı $\frac{24}{3!}=6$

Örnek...3 :



Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir.
A dan yola çıkan bir kişi, B'ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidebilir? Daha önce sıralama başlığında çözdüğümüz bu soruyu seçim sorusu olarak nasıl çözebiliriz?

A dan B'ye en kısa yollar xxxxyyyy ve bu ifadenin farklı sıralamalarıdır.

örnek bazı yollar
xxxxyyyy
xyxyxyxy
yyyyxxxx
⋮

burada yaptığımız aslında 4 tane x (ya da y) e yer seçimi (diğer harf kalan yerlere otomatik)

_ _ _ _ _ _ _ _

8 yerin 4 üne x, $\binom{8}{4}$ şekilde yerleştirilir

Cevap $\underbrace{\binom{8}{4}}_{\text{4 yere x}}\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{kalan 4 yere y}} = 70$

Soru ayrıca
1. tekrarlı permütasyon
2. toplama yoluyla
yapılabilir.

Örnek...4 :

Hilesiz 8 madenî para rastgele atıldığında üçünün tura, beşinin yazı gelebileceği kaç farklı durum oluşacağını bulunuz

TTT YYYYY _ _ _ _ _ _ _ _

I. Yol 8 boşluğa 3 üne T yerleştirelim
$C(8,3)=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\,5!}=56$

II. Yol Tekrarlı permütasyon
$\frac{8!}{5!\,3!}=56$

n tane nesnenin r tanesinin seçimine n elemanın r li kombinasyonları denir ve $C(n,r)$ veya $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

$$C(n;r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!.r!} \qquad (r\leqslant n)$$

1) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

2) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$

3) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

4) $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}$ ise $a=b$ ya da $a+b=n$ dir.

5) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

6) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ (Pascal Üçgeni)

7) $P(n;r)=C(n;r).r!$

Örnek...5 : $\binom{n}{1}=n$

$\binom{n}{2} = 3.\binom{n}{n-1}$ olduğuna göre, n kaçtır?

$\frac{n!}{(n-2)!.2!} = 3.n \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 3n \Rightarrow n-1=6$, $n=7$

Örnek...6 :

$\binom{n}{3} = \binom{n}{6}$ olduğuna göre, n kaçtır?

$n=3+6 \Rightarrow n=9$

Örnek...7 :

$\binom{8}{3} = \binom{8}{n-1}$ ise n' nin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

$\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$ ∨ $\binom{8}{3}=\binom{8}{3}$

$n-1=3$ ∨ $n-1=5$

$\boxed{n=4}$ $\boxed{n=6}$

$n_1.n_2=4.6=24$

Örnek...8 :

$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{8}{7} + \binom{9}{8} + \binom{10}{9} + \binom{11}{10}$

toplamının sonucu kaçtır?

$\binom{8}{6}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{10}{8}$, $\binom{11}{9}$, $\binom{12}{10}$

$\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=\frac{12!}{10!\,2!}=\frac{12.11}{2}=66$

Örnek...9 :

$\binom{x}{4} + \binom{x}{5} + \binom{x+1}{6} = \binom{15}{y}$

ise x+y kaç olabilir?

$\binom{x+1}{5}$ $\binom{x+2}{6}=\binom{15}{y}$

$x+2=15$ → $y=6$, → $y=9$

$x=13,\ y=6 \rightarrow x+y=19$

$x=13,\ y=9 \rightarrow x+y=22$

Örnek...10 :

A = { x, y, z, t } kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

I. Yol $C(4,2)=\frac{4!}{2!2!}=6$

II. Yol önce sıralamaları bulup, sonra sıralama önemsiz olduğundan sıralama sayısına bölelim

$\frac{P(4,2)}{2!}=\frac{4!/2!}{2}=6$

Örnek...11 :

7 elemanlı bir kümenin en çok 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}=2^7-\left[\binom{7}{6}+\binom{7}{7}\right]$

$=128-(7+1)$

$=120$

Örnek...12 :

9 elemanlı bir kümenin en az 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\dots+\binom{9}{9}=2^9-\left(\binom{9}{0}+\binom{9}{1}\right)$

$=512-(1+9)$

$=502$

Örnek...13 :

7 kişi arasından en az 3 kişilik kaç komisyon oluşturulabilir?

$\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=2^7-\left(\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}\right)$

$=128-(1+7+21)$

$=99$

Örnek...14 :

A = {a, b, c, d, e, f} kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde

i) b bulunur?

{b, _, _} → $C(5,2)=10$

a, c, d, e, f 2 si seçilecek

ii) c bulunmaz?

{_, _, _} → $C(5,3)=10$

a, b, d, e, f → 3ü seçilecek

iii) b bulunur, c bulunmaz?

{b, _, _} $\binom{4}{2}=6$

a, d, e, f → 2 si seçilecek

iv) b ve c bulunur?

{b, c, _} $\binom{4}{1}=4$

a, d, e, f → 1 i seçilecek

v) b veya c bulunur?

tümü − hiç biri yok $\binom{6}{3}-\binom{4}{3}=20-4=16$

vi) b ya da c bulunur?

iii) sorusuna benzer

b var c yok → $\binom{4}{2}=6$

b yok c var → $\binom{4}{2}=6$ +

12 durum

Örnek...15 :

Bir öğrenciden 10 soruluk bir sınavda 6 soruyu yanıtlaması isteniyor. İlk 4 sorudan en az 3 tanesini yanıtlamak zorunda ise bu öğrenci kaç farklı biçimde yanıt verebilir?

İlk 4 soru	Son 6 soru
3	3
4	2

$\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{3}+\binom{4}{4}\cdot\binom{6}{2}=4.20+1.15=95$

Örnek...16 :

Bir okulda 6 seçmeli dersten 2 tanesi aynı saatte okutulmaktadır. 3 ders seçmek isteyen bir öğrenci kaç değişik biçimde seçim yapabilir?

A+B	+ 4 ders
0	3
1	2

$\binom{2}{0}\cdot\binom{4}{3}+\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}$

$=1.4+2.6$

$=16$

Örnek...17 :

a, b, c, d, e, t harfleri ile biri sesli ikisi sessiz, 3 farklı harfli kaç sözcük oluşturulabilir?

sesli: a, e sessiz: b, c, d, t

$\underbrace{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}}_{\text{seçimler}}\cdot\underbrace{3!}_{\text{sıralamalar}}=2.6.6=72$

Örnek...18 :

8 öğrenci arasından 4 kişilik bir ekip, bu ekip içinden de bir başkan seçilecektir. Bir başkan ve üç üyeden oluşan bu ekip kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

$\underbrace{\binom{8}{4}}_{\text{ekip}}\cdot\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{başkan}}\cdot\underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{üyeler}}=70.4=280$

Örnek...19 :

Bir otelde iki yataklı bir, üç yataklı iki oda boştur. 8 kişi bu odalara kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

2 3 3

$\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}=28.20.1=560$

Örnek...20 :

a>b>c olmak koşulu ile kaç farklı üç basamaklı (abc) sayısı yazılabilir?

0,1,2,...,9 10 rakamdan kaç 3'lü oluşur diyor

$\binom{10}{3}=\frac{10.9.8.7!}{7!\,3.2}=120$

örneğin 1, 5, 4 seçilirse sayı 541
0, 8, 3 seçilirse sayı 830 olur

Örnek...21 :

10 kişilik bir grupta A ve B kişileri birlikte aynı takımda oynamak istediklerine göre, 5 kişilik kaç farklı takım oluşturulabilir?

A+B + 8 kişi

A, B aynı takımdaysa önce yanlarına 3 kişi sonra kalanlar ile diğer takım

$\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{5}=56$

Örnek...22 :

Farklı 6 tane oyuncak iki kardeşe her birine en az bir tane vermek koşuluyla en çok kaç değişik şekilde verilebilir?

A	B
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

$\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{5}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=62$

diğer durumlarda hepsi 1 olduğu için kalanlar yazılmadı.

II. Yol 6 oyuncak 2 çocuğa koşulsuz 2^6 şekilde dağıtılır, tamamının A'ya da B'ye dağıtıldığı 2 durumu çıkarırız

$2^6-2=62$

n∈ℕ ,n eleman eleman arasından 0, 1, 2, ..., n tane elemanın kaç farklı şekilde seçilebileceğinin ayrı ayrı hesabıyla elde edilen sonuçların listelenerek üçgen şeklinde bir modelleme yapılması mümkündür.

Örnek...23 :

Halit Öğretmen, matematik köyüne bir gezi düzenlemeyi düşünmektedir. Sınıftaki öğrencilerin katılım durumlarını belirten tabloda eksik olan kısımları doldurunuz.

Sınıf Mevcudu	Geziye katılan öğrenci sayısı	Cebirsel Temsiller	Elde edilen Sonuçlar
0	0	$\binom{0}{0}$	1
1	0,1	$\binom{1}{0},\binom{1}{1}$	1,1
2	0,1,2	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	1,2,1
3	0,1,2,3	$\binom{3}{0},\binom{3}{1},\binom{3}{2},\binom{3}{3}$	1 3 3 1
...	⋮	⋮	
n	0,1,2,...,n	$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}$	1,n,...,n,1

PASCAL ÜÇGENİ

Önceki örnekteki sayıları tekrar düzenleyelim

Kombinasyon versiyonu	Sayılar
$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	1 1
$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	1 2 1
$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	1 3 3 1
....	1 4 6 4 1
$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\ldots\binom{n}{n}$	....

Üçgen şeklindeki bu model, genellikle ''Pascal (Paskal) üçgeni'' olarak bilinir. Pascal üçgeninden yararlanarak ifadelerin açılımlarının katsayılarını yazabiliriz.

$(x+y)^0=1$ (Piramitin tepesindeki sayı)

$(x+y)^1=1.x+1.y$ (Piramitin 2. satır sayıları)

$(x+y)^2=1.x^2+2.xy+1.y^2$ (Piramitin 3. satır sayıları)

GÜVERCİN YUVASI İLKESİ

Eğer n tane güvercin m tane yuvaya yerleştiriliyorsa (n>m), en az bir yuvada birden fazla güvercin olmak zorundadır.

Örnek...24 :

Aşağıdaki tabloda araştırma merkezindeki farklı bölümlere ait güvercin yuvası ve güvercin sayıları verilmiştir. Tablodaki her bölüm için, en az bir yuvada kesin olarak bulunan en az güvercin sayısını belirten sütunu, verilen örneklere uygun şekilde doldurunuz.

Toplam Güvercin Yuvası Sayısı	2	8	7	6	8
Toplam Güvercin Sayısı	3	5	10	26	99
Tüm dağılımlarda yuvalardan en az birinde bulunacak minimum güvercin sayısı	2	0	2	5	13

Örnek...25 :

Bir okuldaki öğrenci sayısı bilindiğinde, en az kaç kişinin aynı gün doğduğu belirlenebilir. Aşağıda, farklı okul mevcudu sayıları ve en az kaç kişinin aynı gün doğduğu ile ilgili bir tablo verilmiştir. Tablodaki boş alanları örnekteki gibi uygun şekilde doldurunuz.

Okul Mevcudu	300	500	1000	2000
Mutlaka en az bir günde (aynı günde) doğan kişi sayısı	1 (aynı gün doğan 2 kişi garanti değildir)	2	3	6

Örnek...26 :

Bir çekmecede 3 çift farklı renkte (siyah, beyaz ve gri) çorap bulunmaktadır. Gözler kapalı olacak şekilde en az kaç çorap çekersek, en az bir çift çorap çekmeyi garantileriz?

Aa Bb Cc Çoraplar olsun.
3 farklı çorap çekebiliriz. 4. çorabı çektiğimizde elimizde kesin olarak en az bir çift olur. Cevap 4

Örnek...27 :

Bir tür loto oyunu, biletin üstündeki 1, 2, . . . , 30 sayıları arasından 4 tanesini seçip işaretlemek suretiyle oynanır. Yapılan çekilişte, bu 30 sayıdan 4 tanesi belirlenir. Lotoyu oynayan kişi, biletinde işaretlediği numaralarla çekilişte gelen sayıların hepsini bilirse büyük ikramiyeyi, eğer biletinde çekiliş numaraların hiçbirini tutturamazsa teselli ödülünü alır. Buna göre, teselli ödülünü kazanmayı garantilemek için, en az kaç bilet oynamak gerekir?

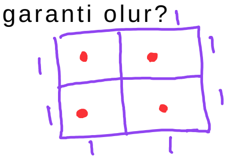
diyelim ki şanslı sayılar 4, 8, 12, 16 olsun
her biri ayrık 5 biletle kesin olarak teselli kazanırız
Çünkü şanslı sayılar en çok 4 farklı bilete dağılabilir

örneğin oynadığımız biletler
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16
17 18 19 20
olursa mutlaka teselli garantidir (5. biletle)

sayılar ayrık kümelerin en çok 4 ünü etkileyebilir.

Örnek...28 :

Bir kenarı 2 birim olan kare içine rastgele en az kaç nokta konulursa, bu noktalar arasında birbirlerine uzaklığı mutlaka $\sqrt{2}$br den az olan en az iki nokta bulunacağı garanti olur?



şekil 1x1 lik 4 birim kareye ayrılsın. bu birim karelerin birinin içinde iki nokta arası mesafe çizgilerin üzerindeyse max $\sqrt{2}$ olur. noktalar şekil içinde alınacağından 5 nokta istediğimizi verir
(4 kırmızı noktaya 1 tane daha eklenirse)

cevap 5