SIRALAMA SAYISI

Günlük hayatta nesneleri sıraya dizmek gibi durumlarla sık sık karşılaşılırız.

Örnek...1 :

Arda, Barkın ve Ceyda isimli üç kardeş yan yana oturacaktır. Bu kardeşlerin kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulunuz.

ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA
6 farklı şekilde sıralanabilirler

FAKTÖRİYEL

n bir doğal sayı olmak üzere,
1 den n' ye kadar (n dahil) bütün sayma sayılarının çarpımına **"n faktöriyel"** denir ve **n!** şeklinde gösterilir.
Bu tanıma göre,

1 ! = 1
2 ! = 1.2 = 2
3 ! = 1.2.3 = 6
4 ! = 1.2.3.4 = 24 olur.

Tanım gereği, 0 ! = 1 olarak alınır.

ÖZELLİK

n! = n.(n –1)! (Örneğin 5! = 5.4! gibi)

n! = n.(n –1).(n –2) ! (5! = 5.4.3!)

n! = n.(n –1).(n –2).(n – 3) ! olur.

PERMÜTASYON

Birbirinden farklı n tane nesnenin r tanesinin farklı her dizilişine (sıralanışına) n nesnenin r li permütasyonları denir ve

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \quad (r \leqslant n)$$

biçiminde gösterilir.

n elemanlı, sonlu bir A kümesinin bütün elemanlarının permütasyonlarının sayısı
P(n, n) = n ! dir.

Not

Sıralama kavramı taşıyan ifadeler saymanın temel ilkesi ya da permütasyondur.
Permütasyonun tanımından anlaşılabileceği gibi, birbirinden farklı dizilişler permütasyonla çözülebilir. Permütasyonla çözülebilen her problem saymanın temel ilkesi ile çözülebilir.

Örnek...2 :

A = { a, b, c } kümesinin elemanlarının bütün permütasyonlarını yazınız.

abc
acb
bac
bca
cab
cba
6 sıralama

Örnek...3 :

P(n, 3) = 720 ise n değeri kaçtır?

$\frac{n!}{(n-3)!}=720 \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}=720$

$n=10$

Örnek...4 :

P(n+3, 2) = 72 ise P(n, n) kaçtır?

$\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=72 \Rightarrow (n+3)(n+2)=72$

$n+3=9 \rightarrow n=6$

$P(6,6)=\frac{6!}{(6-6)!}=\frac{6!}{0!}=720$

Örnek...5 :

4.P(n, 2) = P(2n, 2) – 22 ise n değeri kaçtır?

$4\cdot\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{2n!}{(2n-2)!}-22 \Rightarrow 4\cdot n.(n-1)=2n(2n-1)-22$

$4n^2-4n=4n^2-2n-22$

$2n=22$

$n=11$

Örnek...6 :

A ={1,2,3,4,5,6} kümesinin elemanlarını kullanarak üç basamaklı, rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?

I.Yol istenilen 6 elemanın 3 lü sıralaması P(6,3)

$P(6,3)=\frac{6!}{3!}=6.5.4=120$ sayı

II.Yol Çarpma ilkesiyle

$\underset{1.}{6}\ \underset{2.}{5}\ \underset{3.}{4}=120$ sayı

Örnek...7 :

A = { a, b, c, d, e, f } kümesinin 4 lü permütasyonlarının kaç tanesinde,

a) a harfi bulunur?

$P(6,4) - P(5,4)$ tümü − a bulunmayan 4'lü sıralamalar

$\frac{6!}{2!} - \frac{5!}{1!} = 360-120 = 240$

b) c bulunmaz fakat a bulunur?

c bulunmayan − c ve a bulunmayan

$P(5,4) - P(4,4) = \frac{5!}{1!} - \frac{4!}{0!} = 120-24$

$= 96$

c) a ya da c bulunur?

$\underbrace{\text{a var c yok}}_{96} + \underbrace{\text{a yok c var}}_{96} = 192$

(önceki sorudan)

c var − c var a yok

$P(6,4) - P(5,4) -$

d) a veya c bulunur?

I. Yol

a var c var + a yok c var + a var c yok

a, c: ba, bd, ed, ef, df, bf — 6 durum, 4.4 durum; $6.4!$ (kombinasyon)

$\underbrace{P(5,4) - P(4,4)}_{96}$ $\underbrace{P(5,4) - P(4,4)}_{96}$

$144+96+96 = 336$

II. Yol

tümü − a veya c yok

$P(6,4) - P(4,4) = \frac{6!}{2!} - \frac{4!}{0!} = 360-24$

$= 336$

Örnek...8 :

5 arkadaş yan yana durarak fotoğraf çektirecektir. Bu arkadaşlar kaç değişik poz verebilir?

I. Yol $n=5$ $r=5$ istenen $P(5,5) = 5! = 120$

II. Yol Çarpma ilkesiyle $\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 120$

Örnek...9 :

4 kız ve 4 erkek, aynı cinsiyetten iki kişi arka arkaya olmamak üzere, en çok kaç farklı kantin sırası oluşturabilir ?

K E K E K E K E → $4!.4!$

E K ... E K → $+\ 4!.4!$

2 farklı sıralama oluşturulabilir

$2.4!.4!$

Örnek...10 :

Aynı türün kitapları birbirinden farklı olmak üzere ,3 edebiyat, 5 felsefe ve 7 tarih kitabı bir rafa yan yana en çok kaç farklı şekilde dizilebilir?

Kozulbuz $n = 3+5+7 = 15$ nesne

$r = 15$ (15'li sıralama)

$P(15,15) = 15!$

Örnek...11 :

Kalınlıkları farklı 6 kitap bir rafa yan yana dizilecektir.

a) En çok kaç değişik biçimde dizilebilirler?

$P(6,6) = 6!$

b) En ince 2 kitap yan yana gelecek biçimde en çok kaç değişik şekilde dizilebilirler?

$\underbrace{A+B}_{1 \text{ kitap}} + 4$ kitap

$\underbrace{P(5,5)}_{4+1 \text{ kitap}} \cdot \underbrace{P(2,2)}_{\text{A ve B sırası}}$

$5!.2!$

c) En ince 2 kitap yan yana gelmeyecek biçimde en çok kaç değişik şekilde dizilebilirler?

I. Yol $\underbrace{P(6,6)}_{\text{kozulbuz}} - \underbrace{P(5,5) \cdot P(2,2)}_{\text{yanyana durumu}} = 6! - 5!.2!$

$= 720 - 240$

$= 480$

II. Yol • A • B • C • D •

önce A, B, C, D → $P(4,4) = 4!$

kırmızı noktalara 2 nesne 6.5 şekilde yerleştirilebilir

cevap $5.4.4! = 20.24 = 480$

Örnek...12 :

Aynı türün kitapları birbirinden farklı olan 4 matematik, 5 fizik ve 3 kimya kitabı bir rafa

a) En çok kaç farklı biçimde sıralanabilir?

$P(12,12) = 12!$

b) Matematik kitapları yan yana olmak üzere en çok kaç biçimde sıralanabilir?

matematikler önce 1 kitap sayılır sonra kendi aralarındaki sıralamaları hesaba katılır.

$4M + 5F + 3K = 9$ kitap

cevap $P(9,9) \cdot P(4,4)$

$= 9! \cdot 4!$

c) Aynı tür kitaplar yan yana olmak üzere kaç farklı biçimde sıralanabilir?

$4M + 5F + 3K$

$P(3,3) \cdot P(4,4) \cdot P(5,5) \cdot P(3,3)$

$3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3!$

Örnek...13 :

4 portre ile 6 natürmort resim bir sergide yan yana olacak şekilde aynı duvara asılacaktır. Portrelerin herhangi ikisinin yan yana gelmemesi koşuluyla resimler en çok kaç farklı şekilde sergilenebilir?

$\bullet N_1 \bullet N_2 \bullet N_3 \bullet N_4 \bullet N_5 \bullet N_6 \bullet$

önce Natürmortlar $P(6,6) = 6!$

Sonra noktalara portreler $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

cevap $6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6! \cdot 7!}{3!}$

Örnek...14 :

A ={1,2,3,4, 5} kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek rakamları farklı beş basamaklı sayıların en çok kaç tanesinde 3 rakamı 5 rakamının solunda bulunur?

I.Yol $P(5,5)$ tümü

3, 5 in solunda = 3, 5 in sağında dolayısıyla sıralama 2'ye bölünür

cevap $\frac{P(5,5)}{2} = \frac{5!}{2!} = 60$

II.Yol

$\bullet\ 3 \bullet 5 \bullet$

1 2 4

önce 3 ve 5 yerleştirilir 3 noktadan önce ilkine 3 şekilde sonra nokta sayısını arttığına dikkat edin

$\frac{3}{1.} \cdot \frac{4}{2.} \cdot \frac{5}{3.} = 60$

örneklendirelim

örneğin 1 i ortaya yerleştirelim

$\bullet\ 3 \bullet 5 \bullet \Rightarrow \bullet 3 \bullet 1 \bullet 5 \bullet \Rightarrow \bullet 2 \bullet 3 \bullet 1 \bullet 5 \bullet$

sıradaki sayının yerleşeceği 4 yer var

sıradaki 4 ün yerleşeceği 5 nokta

$\underline{3} \cdot \underline{4} \cdot \underline{5}$

60 yerleşim

Örnek...15 :

A={1,2,3,4,5,6}

kümesinin elemanlarını en çok bir defa kullanmak koşuluyla yazılan üç basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru dizilirse 452 baştan kaçıncı sırada olur?

1 ile başlayan $\underline{1}\ \underline{5}\ \underline{4} \rightarrow 20$ sayı

1

1 → 20

2 → 20

3 → 20

4 → 20

4 ile yazılan en büyük sayı 80. Sondan geri gidelim

465 → 80.

463 → 79.

462 → 78.

461

456

453

452 → 74.

TEKRARLI (YİNELEMELİ) PERMÜTASYON

n tane nesneden bazılarının yer değiştirmesi, nesnelerin bazıları özdeşse farklı bir sıralanma oluşturmayabilir.

Örneğin ADA kelimesinin harflerinin yerleri değişmesi sonucu 6 farklı sıralama yerine 3 farklı sıralama elde edilir.

n nesnenin n_1 tanesi 1. çeşitten, n_2 tanesi 2.çeşitten, n_3 tanesi 3. çeşitten n_k tanesi de k. çeşitten olsun. $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ olmak üzere bu n nesnenin permütasyonlarının (dizilişlerinin) sayısı $\dfrac{n!}{n_1!\,.\,n_2!\ldots n_k!}$ dir.

Örnek...1 :

Aynı renkten olan bilyeler özdeş olmak üzere, 3 mavi, 4 kırmızı ve 5 yeşil kalem bir sırada yan yana en çok kaç farklı biçimde dizilir?

$\dfrac{12!}{3!\,4!\,5!}$

Örnek...2 :

"MATEMATİK" sözcüğündeki harfler yer değiştirildiğinde, anlamlı ya da anlamsız 9 harfli en çok kaç değişik kelime yazılır ?

$\dfrac{9!}{2!\,.\,2!\,.\,2!}$

M A T

Örnek...3 :

8,7,7,6,6,3 rakamları ile 6 ile başlayıp 3 ile biten

a) 6 basamaklı en çok kaç sayı yazılabilir?

b) 5 basamaklı en çok kaç sayı yazılabilir?

a) 6 _ _ _ _ 3 8776 → $\dfrac{4!}{2!} = 12$

b) 6 _ _ _ 3

877 → $3!/2! = 3$

876 → $3! = 6$

776 → $3!/2! = 3$

3+6+3 = 12

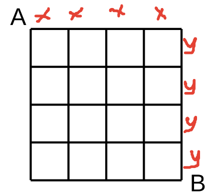
Örnek...4 :

BEMBEYAZ kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilen anlamlı ya da anlamsız 8 harfli kelimelerin en çok kaç tanesinde B harflerinden sonra E harfleri gelir? (B ve E harfleri arasına başka harf girmiyor)

X M X Y A Z $\dfrac{6!}{2!}$

Örnek...5 :

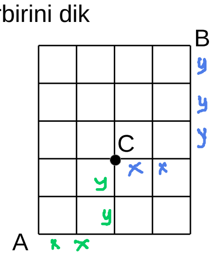
Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A dan yola çıkan bir kişi, B'ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidebilir?



xxxxyyyy ve dizilimleri

$\dfrac{8!}{4!\,4!}$

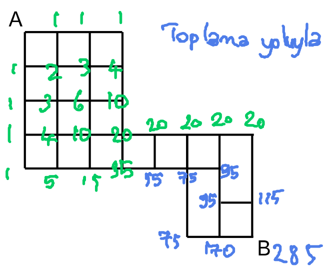
ii) Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A dan yola çıkan bir kişi, C'ye uğramak koşuluyla, B'ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidebilir?



A C: $\dfrac{4!}{2!\,2!}$. C B: $\dfrac{5!}{3!\,2!}$ (beraber)

6 . 10 = 60

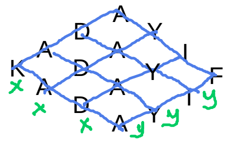
iii) Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A'dan yola çıkan bir kişi, B'ye en kısa yoldan en çok kaç farklı şekilde gidebilir?



285

Örnek...6 :

Soldaki K harfinden başlayıp komşu harfleri takip ederek sağdaki F harfiyle bitecek şekilde "kadayıf" kelimesi en çok kaç farklı şekilde okunabilir?



$\frac{6!}{3!3!} = 20$

Örnek...7 :

Bir para 8 kez atıldığında üçünün tura olduğu en çok kaç farklı durum vardır?

TTT YYYYY → $\frac{8!}{3!5!} = 56$

Örnek...8 :

32002423 sayısının rakamlarının yeri değiştirilerek 8 basamaklı

a) en çok kaç sayı yazılabilir?

6 7 6 5 4 3 2 1

$\frac{6.7!}{2!2!3!}$

b) en çok kaç farklı tek sayı yazılabilir?

5 6 5 4 3 2 1 3 (3,3)

$\frac{5.6!.2}{2!2!3!}$

c) en çok kaç farklı çift sayı yazılır?

çift = tüm − tek

$\frac{6.7!}{2!2!3!} - \frac{5.6!.2}{2!2!3!}$

Örnek...9 :

1,2,3,4,5,6,7 rakamlarıyla yazılacak 7 basamaklı rakam tekrarsız sayıların en çok kaç tanesinde çift sayılar soldan sağa artan sıradadır.

2, 4, 6 = x, x, x

1, x, 3, x, 5, x, 7 → $\frac{7!}{3!}$

2.yol . 2 . 4 . 6 .

4. 5, 6, 7 = $\frac{7!}{3!}$

1 tek 2. 3. 4.

Örnek...10 :

✱ ayraçtır

5 özdeş oyuncak üç çocuğa

a) en çok kaç farklı biçimde verilebilir?

00 000 → A B C

00 ✱ 00 ✱ 0 → (2,2,1)

0 ✱ 000 ✱ 0 → (1,3,1)

sıralamalar farklı dağılımlardır

$\frac{7!}{5!2!} = 21$

b) her çocuk en az bir oyuncak alacak şekilde oyuncaklar en çok kaç farklı biçimde verilebilir?

00 → A ✱ B ✱ C

00✱✱ → $\frac{4!}{2!2!} = 6$

Örnek...11 :

Bir pastanede 5 çeşit pasta bulunmaktadır 10 tane pasta almak isteyen biri her çeşitten en az bir tane almak koşuluyla en çok kaç farklı seçim yapabilir?

pasta türleri → dağıtılan

A B C D E

✱ ✱ ✱ ✱ 0 0000

$\frac{9!}{5!4!}$

Örnek...12 :

Rakamları toplamı 8 olan kaç farklı 3 basamaklı sayı vardır?

a ✱ b ✱ c

(a ya 0 olmasın diye 1 verilir)

000 0000 → 0000000✱✱

$\frac{9!}{7!2!}$