SAYMA

"Calculus" (Kalkülüs) kelimesi Latince calculus kelimesinden gelir ve anlamı "küçük taş, çakıl taşı" dır.
Bu da calx (kireçtaşı, taş) kökünden türemiştir.
Antik çağlarda insanlar soyut sayılarla değil, fiziksel nesnelerle sayma yapıyordu. Örneğin bir çoban, sürüden çıkan her koyun için bir taş (çakıl taşı / taş) koyuyor, akşam geri dönen her koyun için bir taşı geri alıyor ve eğer taş kalırsa koyun eksik; taş yetmezse fazladan koyun var şeklinde yorumluyordu.
Bu taşlar tam anlamıyla bir hesaplama aracıydı. Zamanla bu tür taşlarla yapılan hesaplara Latince'de calculus denmeye başlandı. Bu taşlarla bugünkü matematiğin en temel fikirleri olan toplama, çıkarma , eşleme ve karşılaştırma gibi işlemler yapılıyordu.
Daha sonraları "calculus" kelimesi Newton ve Leibniz zamanında (17 ve 18. yüzyıllardan itibaren) türev ve integral hesabı anlamına gelecek şekilde anlam kazanmıştır.

1) EŞLEME YOLUYLA SAYMA :

Bir kümenin eleman sayısını, kümenin elemanlarını sayma sayıları kümesinin elemanlarıyla bire bir eşleyerek bulma işlemine eşleme yoluyla sayma denir.

Eşleme yoluyla saymayı daha önce sayıları bilmeyen ama saymayı bilen eski çağ çoban hikayesinde örneklendirmiştik.
Bu konuda tüm zamanların en büyük matematikçisi kabul edilen Carl F. Gauss ile ilgili aşağıdaki hikaye de (muhtemelen kurgu olan ama çok önemli matematiksel bir düşünceyi içeren) anlatılır.
Gauss daha çocukken babasıyla birlikte ormanda yürürken babasına yürüdükleri ormandaki ağaç sayısının mı , yoksa bir ağaçtaki yaprak sayısının mı fazla olduğunu sormuş. Babası biraz düşündükten sonra ormandaki ağaç sayısının çok daha fazla olduğunu söylemiş. Gauss da bu cevap üzerine o halde bu ormanda eşit yaprak sayısına sahip en az iki ağaç mutlaka bulabiliriz demiştir.

Bu öykünün arkasındaki fikir şudur:
Nesne sayısı, mümkün durum sayısından fazlaysa, en az iki nesne aynı durumu paylaşır.
Bugün bu ilkeye:
Güvercin Yuvası Prensibi diyoruz.

2) TOPLAMA YOLUYLA SAYMA :

Sonlu ve ayrık A ve B kümelerinin birleşimlerinin eleman sayısını bulmaya toplama yoluyla sayma yöntemi denir.
Yani,
s(AUB) = s(A) + s(B) dir. (A VEYA B)

Örnek...1 :

Ece 3 mavi, 2 pembe ve 5 yeşil gömlek arasından 1 gömleği kaç farklı şekilde seçebilir?

$\{M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5\}$

seçenek sayısı $3+2+5=10$ dur.

Örnek...2 :

10 farklı kalem ve 5 farklı silgiden, 1 kalem ya da 1 silgiyi kaç farklı yolla alabiliriz.

1 kalem 10 1 silgi 5 yolla seçilebilir

kalem ya da silgi $10+5=15$ yolla seçilebilir

Örnek...3 :

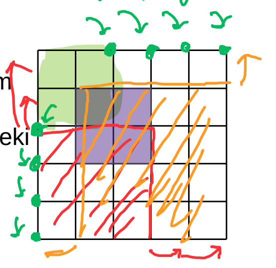
Bir sınıfta 23 kız öğrenci ve 12 erkek öğrenci bulunmaktadır. Bu sınıftan bir sınıf başkanı kaç farklı şekilde seçilebilir?

$\underset{\text{1. iş başkan seçimi}}{\underline{25}} \cdot \underset{\text{2. iş başkan yrd seçimi}}{\underline{24}} = 600$

Örnek...4 :

Yandaki şekil 25 adet birim kareden oluşmaktadır. Buna göre şekilde, alanı 1 birim kareden büyük (kenarları bu dikey ve yatay çizgiler üzerinde bulunan ve bir örneği şekildeki gibi verilen) kaç tane kare vardır?

olduğu konum dahil
4 defa kaydırılabilir



Şekilde 2x2 lik kare sayısı 4.4
(satırda 4 ve sütunda 4)

3x3 lük kare sayısı 3.3

4x4 lük kare sayısı 2.2

5x5 lik kare sayısı 1 tane (şeklin kendisi)

toplam kare sayısı $16+9+4+1=30$ tane
(1x1 lik kareler hariç)

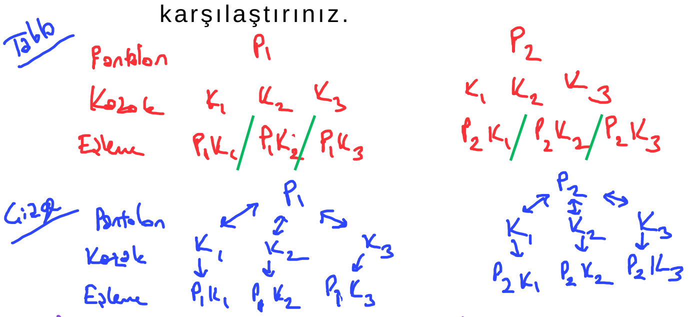
3) ÇARPMA YOLUYLA SAYMA :

Ortak elemana sahip olmayan farklı iki nesne grubundan birer eleman seçerek oluşturulan ikililerin sayısını çarparak bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** denir.

x farklı biçimde gerçekleşen bir işleme bağlı olarak, ikinci bir işlem y farklı biçimde gerçekleşiyorsa, bu iki işlemin birlikte gerçekleşme sayısı x.y dir.
Burada yapılan işlem ikiden fazla adımdan oluşan işlemler için genellenebilir.
Bu şekilde yapılan sayma işlemine çarpma yoluyla sayma denir.
(AxB kümesinin elemanları olan (x, y) sıralı ikililerinin sayısı s(A) =a ve s(B)=b olmak üzere a.b adet olur.)

Örnek...5 :

Haldun'un 3 farklı renkte pantolon, 4 farklı renkte kazağı vardır. Buna göre Haldun'un kaç farklı şekilde giyinebileceğini tablo yöntemi ve çizge yöntemi kullanarak belirleyiniz. Çarpma yoluyla sayma yöntemini kullanarak bulduğunuz çözümleri karşılaştırınız.

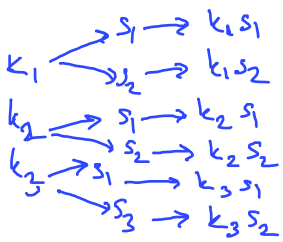


çarpma ilkesiyle $\underset{\text{1,2 pantolon seçimi}}{2} \cdot \underset{\text{3 kazak seçimi}}{3} = 6$ bunlar

Çarpma ilkesi kullanışlılık açısından daha pratiktir.

Örnek...6 :

Bir kırtasiyedeki 3 farklı kalem ve 2 farklı silgiden, 1 kalem ve 1 silgiyi almak istiyoruz. Bir ağaç diyagramı üzerinde oluşacak durumları gösteriniz. En çok kaç farklı şekilde işlemi yapabiliriz?



işlemi en çok 6 farklı biçimde yapabiliriz.

çarpma ilkesiyle $\underset{\text{1,2,3 kalem seçimi}}{3} \cdot \underset{\text{2 silgi seçimi}}{2} = 6$ şekilde yapılabilir

Örnek...7 :

Bir öğrencinin 3 parayı atması deneyinde paraların "Yazı-Tura" gelişi kaç farklı şekilde meydana gelmiştir, ağaç diyagramı ile göstererek bulunuz.

çarpma ilkesiyle $\underset{Y,T}{2} \cdot \underset{Y,T}{2} \cdot \underset{Y,T}{2} = 8$

Örnek...8 :

0 ya da 1 ile temsil edilen bit, dijital bilgi depolamanın en küçük birimidir. Bayt ise 8 bitlik bir gruptan oluşur. Bitler ve baytlar; bir bilgisayardaki verileri depolama, iletme ve işleme işlemleri için kullanılır.
Örneğin bilgisayar kodlama sisteminde 'B' harfi ASCII {ASKİ (Amerikan Bilgi Değişimi İçin StandartKod)} tablosunda 66 sayısına karşılık gelir ve bu sayı ikili sistemde 7 bitlik 1000010 karakter kümesi ile gösterilir.
Benzer şekilde, '[' karakteri ASCII tablosunda 91 sayısına karşılık gelir ve bu da 7 bitlik 1011011 karakter kümesi ile gösterilir.
Buna göre
a) 5 bitlik bir verideki dizilimin kaç farklı karakter kümesi ile ifade edilebileceğini bulunuz.
b) Bir baytlık verideki bir dizilimin kaç farklı karakter kümesi ile ifade edilebileceğini bulunuz.

a) $\underset{0,1}{2} \; \underset{0,1}{2} \; \underset{0,1}{2} \; \underset{0,1}{2} \; \underset{0,1}{2} = 2^5$ farklı karakter kümesi oluşturulabilir.

b) bir bayt = 8 bit, her bir bit 0, 1 değerlerinden birini alır.

$2\;2\;2\;2\;2\;2\;2\;2 = 2^8 = 256$ karakter kümesi oluşturulabilir.

Örnek...9 :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamları kullanılarak tekrarsız dört basamaklı sayılar yazılacaktır.

a) En çok kaç sayı yazılabilir?

$\underset{1,2,..6}{6} \; \underset{0,...6}{6} \; 5 \; 4 = 720$

b) En çok kaç tane tek sayı yazılabilir?

$\underset{1,...6}{5} \; 5 \; 4 \; \underset{1,3,5}{3} = 300$

c) En çok kaç tane çift sayı yazılabilir?

I) $720 - 300 = 420$ II. Yol $6\;5\;4\;\underset{0 \to \text{birler} \atop \text{bas}}{1} + 5\;5\;4\;\underset{2,4,6 \to \text{birler bas}}{3} = 120 + 300 = 420$

d) 25 ile bölünebilen kaç tane sayı yazılabilir?

$4 \; 4 \; \underset{2}{1} \; \underset{5}{1} = 16$ son iki basamağı

$5 \; 4 \; \underset{5}{1} \; \underset{0}{1} = 20$

toplam $16+20=36$ sayı 25 ile bölünür.

Örnek...10 :

A = { a, b, c, d, e, f, g } kümesinin elemanları kullanılarak anlamlı veya anlamsız 4 harfli

a) En çok kaç değişik kelime türetilebilir?

7 7 7 7 7^4

b) Sesli bir harf ile başlayıp, sesli bir harfle biten harfleri farklı kaç değişik en çok kaç kelime türetilebilir?

2 5 4 1 = 40

a,e a,e

c) Her harf en çok bir defa kullanılmak şartıyla, sesli bir harfle başlayıp sessiz bir harfle biten en çok kaç değişik kelime türetilebilir?

2 5 4 5 = 200

a,e bcdfg

d) İçinde a' nın mutlaka bulunduğu en çok kaç değişik kelime türetilebilir?

$\underbrace{7\ 7\ 7\ 7}_{\text{hepsi}} - \underbrace{6\ 6\ 6\ 6}_{\text{a yok}} = 7^4 - 6^4$

e) a ile başlayıp d ile bitmeyen en çok kaç değişik kelime türetilebilir?

1 7 7 6 = 294

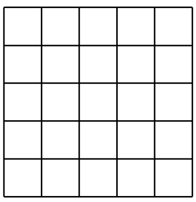
a d dışında

f) e ile başlayıp f ile biten tekrarsız en çok kaç değişik kelime yazılabilir?

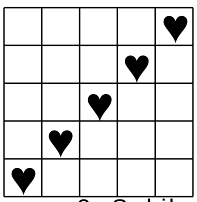
1 7 7 1 = 49

e f

Örnek...11 :



1. Şekil



2. Şekil

5x5 lik 1. şekil üzerinde her satır ve her sütuna yalnızca bir ♥ sembolü çizilerek 2. şekildeki gibi desenler oluşturuluyor. Buna göre, en çok kaç farklı desen oluşturulabilir ?

sütunlardan

5 4 3 2 1 = 5!

1'i 2'yi

120 farklı şekilde

Örnek...12 :

A kenti ile B kenti arasında 5 farklı yol, B kenti ile C kenti arasında 3 farklı yol vardır. B kentine uğramak koşuluyla,

a) A' dan C' ye kaç farklı yoldan gidebilir?

$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} C$ 5.3 = 15 şekilde

b) A' dan C' ye gidip geri dönen yolcu kaç farklı yoldan gidip dönebilir?

gidiş 15 dönüş 15 beraber $15^2 = 225$

c) A' dan C' ye gidip geri dönen yolcu gittiği yolu, dönerken kullanmamak koşulu ile kaç farklı yoldan gidip dönebilir?

gidiş 15 dönüş 14 beraber 15.14 = 210

d) A' dan C' ye gidip geri dönen yolcu gittiği yolları, dönerken kullanmamak koşulu ile kaç farklı yoldan gidip dönebilir?

gidiş 3.5 = 15 dönüş 4.2 = 8 beraber 15.8 = 120

Örnek...13 :

7056 sayısının rakamları kendi aralarında yer değiştirirse kendisi hariç 4 basamaklı en çok kaç çift sayı elde edilebilir?

sonu 0: $\underbrace{3\ 2\ 1\ 1}_{\text{6 sayı}}$

sonu 6: $\underbrace{2\ 2\ 1\ 1}_{\text{4 sayı}}$ 6

6+4 − 1 = 9 çift sayı yazılabilir

kendisi hariç diyor