

## FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Fonksiyonlar ile modellenmiş denklem ve eşitsizlikler içeren problemleri çözebilmek günlük hayattaki karmaşık ilişkileri daha basit ve anlaşılır hale getirmeyi, doğru kararlar almayı sağlar.

### KARESEL FONKSİYONLARIN İŞARETİ

Karesel fonksiyonlar bağımsız değişken  $x$  in alacağı değerlere göre pozitif ya da negatif değerler alabilir ya da sıfır olabilirler. Fonksiyonun hangi aralıkta işaretinin nasıl olacağını işaret tablosu dediğimiz tabloda özetleriz.

Şimdi tablonun nasıl yapılacağını gösterelim.

#### Örnek...1 :

$f(x) = x^2 - 4x - 32$  fonksiyonunun işaret tablosunu oluşturunuz.

**Adım 1** verilen ifadenin çarpanlara ayırma yöntemiyle var ise sıfırları bulunur.

1. Yol: Son terimin çarpanlarından

$$\begin{array}{l} x^2-4x-32 \\ x \quad -8 \\ x \quad +4 \end{array} \quad \text{dolayısıyla} \quad \begin{array}{l} x^2-4x-32 = (x-8)(x+4) \\ x_1=8 \text{ ve } x_2=-4 \end{array}$$

2.Yol: Tam kareye tamamlama

$$\begin{aligned} x^2-4x-32 &= (x-2)^2-4-32 = (x-2)^2-36=0 \\ (x-2)^2 &= 36, x-2=6 \text{ veya } x-2=-6 \\ x_1 &= 8 \text{ ve } x_2 = -4 \end{aligned}$$

olarak sıfırlar (kökler) elde edilir

**Adım 2** Bulunan kök ya da kökler (kök olmayabilir) tabloya yerleştirilir. Bu adımda tablo şu şekillerden biridir.

**Durum1** Kök yoksa

$x$	$-\infty$	$\infty$
$ax^2+bx+c$	a işareti	

**Durum2** Çift katlı gerçek kök(ler) varsa (kökler aynıysa)

$x$	$-\infty$	$x_1=x_2$	$\infty$
$ax^2+bx+c$	a işareti	○	a işareti

**Durum3** İki farklı gerçek kök varsa

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$\infty$	
$ax^2+bx+c$	a işareti	○	a'nın işaretinin zıttı	○	a işareti

a işareti yerine, aralıktan değer olarak bölge işaretini bulabiliriz. Şimdi tablomuza dönelim.

$x$	$-\infty$	$-4$	$8$	$\infty$
$x^2-4x-32$		○	○	

**Adım 3** kök olmayan bir değer için bir aralığın işareti bulunur.

$x$	$-\infty$	$-4$	$8$	$\infty$
$x^2-4x-32$		○	-	○

$x=0$  için ifade negatif

**Adım 4** çift katlı olmayan köke rastlandıkça tabloda işaret değiştirilerek (bir + bir - şeklinde) işaretler yazılarak tablo tamamlanır.

$x$	$-\infty$	$-4$	$8$	$\infty$	
$x^2-4x-32$	+	○	-	○	+

Üstte işaret tablosunun bitmiş hali görülmektedir.

Özetlersek  $x < -4$  ve  $x > 8$  için  $f(x) > 0$   
 $-4 < x < 8$  içinse  $f(x) < 0$  olmaktadır.

**Uyarı:** Bu tablo birinci derece çarpanları şeklinde ayrı ayrı satırlar yapılarak da hazırlanabilir fakat hem pratik olmaması hem de kök olmayınca daima birinci derece çarpan bulunamaması sebebiyle tercih etmeyebiliriz. (Notun çözümler kısmında bu örnek için nasıl yapıldığını inceleyebilirsiniz)

$$x^2-4x-32 = (x-8)(x+4)$$

$x$	$-\infty$	$-4$	$8$	$+\infty$
$x-8$	-	-	○	+
$x+4$	-	○	+	+
$(x-8)(x+4)$	+	-	○	+

Görülürken en alt satır işareti bulunur.  
İki 2. satır işaretleri çarpılarak elde edilir

**Örnek...2 :**

Verilen fonksiyonların işaret tablolarını hazırlayınız.

$$f(x)=x^2-x-12, g(x)=x^2-5x+6, h(x)=x^2+6x+9$$

$$r(x)=x^2-2x+7, k(x)=-x^2-3x+18$$

$$x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x^2-x-12$		+	⊖	+

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2-5x+6$		+	⊖	+

$$x^2+6x+9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x^2+6x+9$		+	+

$$x^2-2x+7 = (x-1)^2-1+7=0 \Rightarrow (x-1)^2=-6 \quad \mathcal{C}=\emptyset$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2-2x+7$	+	+

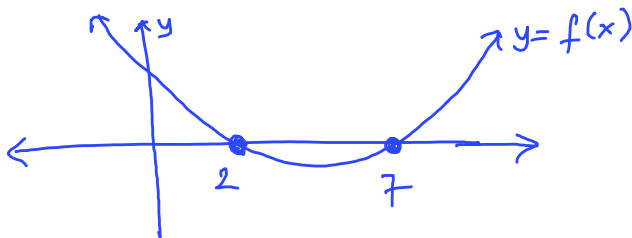
$$-x^2-3x+18 = -(x^2+3x-18) = -(x+6)(x-3)$$

x	$-\infty$	-6	3	$+\infty$
$-x^2-3x+18$	-	⊖	+	-

**Örnek...3 :**

Bir deniz altının yatay zeminde alınan yol x (km) olmak üzere hareketi  $f(x) = x^2 - 9x + 14$  fonksiyonu ile modellenmiştir. Deniz yüzeyi çizgisi x eksenini ve deniz yüzeyine dik olan doğru y eksenini olarak kabul edilirse, denizaltı hareketi boyunca suyun altında kaç km yol gitmiştir?

$$x^2-9x+14 = (x-7)(x-2)$$

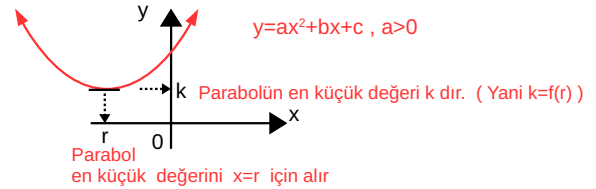


$7-2 \rightarrow 5$  km su altında gitmiştir.

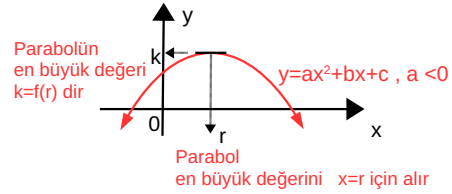
**HATIRLATMA**

Tanım kümesi R (gerçek sayılar) olan bir parabolün (karesel fonksiyonun) grafiği başkatsayı olan a sayısına bağlı olarak iki şekilde olabilir.

$a > 0$  için kollar yukarı ve parabol bir en küçük değere (minimum) sahip,



$a < 0$  için kollar aşağı ve parabol bir en büyük değere (maksimum) sahiptir



Her iki durumda da elde edilen ekstremum (yani en küçük veya en büyük değer) tepe noktası denilen noktada  $x=r = \frac{-b}{2a}$  fonksiyonda yerine yazılarak k değeri olarak elde edilir.

Tanım kümesi tüm reel sayılar değilse fonksiyonun maksimum ya da minimum değerleri tepe noktasında karşımıza çıkmayabilir. (tepe noktası tanım aralığında olmayabilir.)

**Örnek...4 :**

$f(x) = ax^2 + bx + c$  fonksiyonunun ( $a > 0$ ) için minimum değerini  $x=r = \frac{-b}{2a}$  için aldığını gösteriniz.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{bx}{a} \right) + c$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c$$

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + p \quad (\text{düzenledik})$$

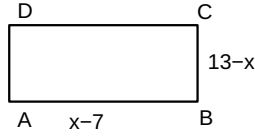
bir üst üstdede ifadenin en küçük olması için tam kare kısmının 0 olması gerekir.

$x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$  için ifade en küçük değeri alır. ( $a > 0$  ve p bir sabit değer)

(Burada p sayısı a, b ve c ye bağlı sabit bir değer olup değeri  $f(x)$  in minimum değeridir)

**Örnek...5 :**

Şekilde yüksekliği sabit, taban ayrıtlarıysa  $x-7$  br, ve  $13-x$  br olan dikdörtgenler prizmasının tabanı verilmiştir. Bu prizmanın hacmi en çok 144 birim küp oluyorsa,  $x$  kaçtır?



$$\text{hacim} = \text{taban alanı} \times \text{yükseklik} = (x-7)(13-x) \cdot h = 144$$

$$(-x^2 + 20x - 91) \cdot h = 144$$

taban alanı maks için  $r = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{-2} = 10$

$x=10$  dur

$$\text{hacim} = 3 \cdot 3 \cdot h = 144 \rightarrow h = 16 \text{ br}$$

**Örnek...6 :**

Isıtılan bir balonun hacminin zamana bağlı değişimi  $V(x)=24x-x^2$  denklemiyle verilmektedir.

Burada  $V(x)$  balonun hacmini (birim<sup>3</sup>),  $x$  ise zamanı (dakika) göstermektedir.

- a) Balonun hacmi en çok kaç birim<sup>3</sup> olur?  
b) Balon hacmi **80 birim<sup>3</sup>** 'ten büyük olduğu sürece havada kalabildiğine göre, balon kaç dakika havada kalır?

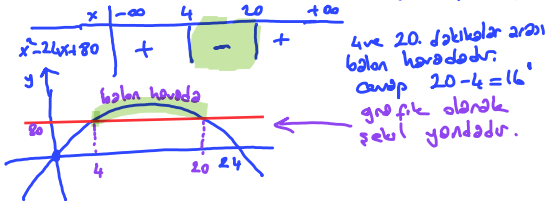
a)  $V(x) = 24x - x^2$  kollarını aşağı yönlü bir parabolüdür

$$a = -1 \quad b = 24 \quad c = 0$$

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{-2} = 12 \text{ (bu değer için } V \text{ maks olur)}$$

$$V(12) = 24 \cdot 12 - 12^2 = 144 \text{ br}^3$$

b)  $V(x) > 80 \Rightarrow 24x - x^2 > 80 \rightarrow x^2 - 24x + 80 < 0$   
( $x-20$ )( $x-4$ )

**Örnek...7 :**

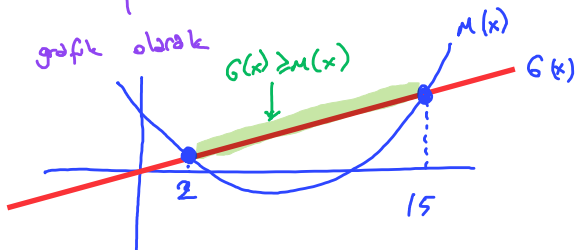
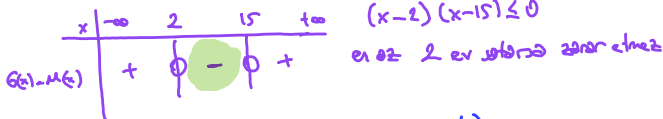
Ev inşaatı yapan bir inşaat şirketin satışını yaptığı evlerin adedine ( $x$ ) bağlı olarak geliri ( $G$ ) ve maliyeti ( $M$ ) sırasıyla  $G(x) = 29x$  ve  $M(x) = x^2 + 12x + 30$  fonksiyonları ile modellenmektedir. Buna göre, bu şirketin zarar etmemesi için az kaç ev satması gerektiğini bulunuz.

Zarar etmemesi için  $G(x) \geq M(x)$  yada  $G(x) - M(x) \geq 0$  olmalıdır.

$$G(x) - M(x) = 29x - x^2 - 12x - 30 = -x^2 + 17x - 30 \geq 0$$

$$x^2 - 17x + 30 \leq 0$$

$$(x-2)(x-15) \leq 0$$

**Örnek...8 :**

Haldun ikinci katta bulunan evinin balkonunda yeni aldığı maket uçağını uçuracaktır. Yer seviyesine indiğinde durduğu bilinen bu uçağın izlediği yolda yerden yüksekliğini zamana (dakika) bağlı değişimini, metre cinsinden gösteren fonksiyon  $h(t) = -t^2 + 24t + 25$  dur.

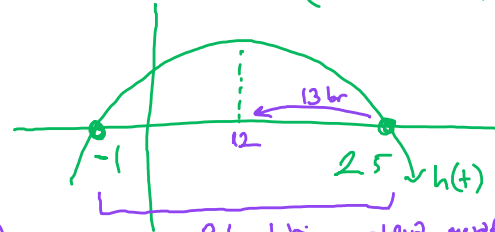
Hareketin grafiğini çizerek soruları cevaplayınız.

- a) harekete başladıktan sonra uçak yerden en çok kaç metre yükselmiştir?

- b) uçağın yüksekliği kaç dakika süreyle 160m den fazladır.

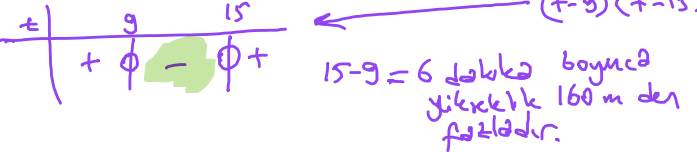
$$-t^2 + 24t + 25 = - (t^2 - 24t - 25) = 0$$

$$- (t-25)(t+1) = 0$$



a)  $h(12) = -12^2 + 24 \cdot 12 + 25 = 169 \text{ m}$

b)  $h > 160 \rightarrow -t^2 + 24t + 25 > 160$   $t^2 - 24t + 135 < 0$   
( $t-9$ )( $t-15$ ) < 0

**Örnek...9 :**

"Bir çay ocağında günlük en fazla 400 adet çay satılabilmektedir. Bir bardak çayın satış fiyatı 12 ₺ dir. Çaycı çaya yaptığı her 2 TL'lik artış sonrasında müşteri sayısında 20 kişilik bir azalma olduğunu gözlemlemiştir. Buna göre, çaycının elde edeceği günlük gelirin en fazla olması için çay fiyatını kaç ₺ olarak belirlemelidir?"

$x$  defa 2 ₺ artış yapılır

Fiyat  $12+2x$       Müşteri Sayısı  $400-20 \cdot x$

Gelir = Fiyat. Müşteri Sayısı

$$= (12+2x)(400-20x)$$

$$= 2(x+6) \cdot 20(20-x)$$

$$= 40(-x^2 + 14x + 120) \rightarrow r = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-2} = 7$$

en fazla gelir için fiyat  $12+2 \cdot 7 = 26$  ₺ olmalıdır.