

TERS FONKSİYON

Bir fonksiyonun uyguladığı işlemi tersine çevirmek için ona karşılık gelen özel bir fonksiyona ters fonksiyon denir.

Her fonksiyonu için ters fonksiyon bulamayabiliriz. (Belirli nitel özelliklere sahip fonksiyonlar ters fonksiyona sahiptir)

Örnek...1 :

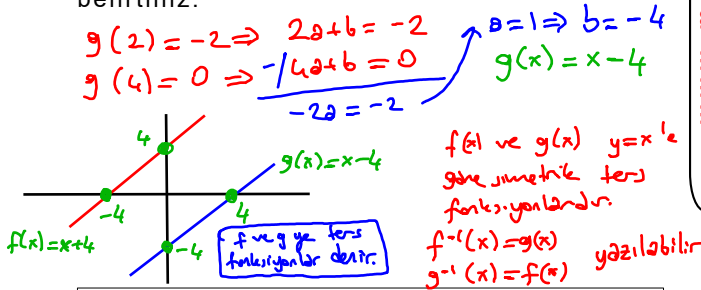
Tablo 1

$f(x) = x+4$	Bağımsız Değişken	-2	0	1	2	5
	Bağımlı Değişken	2	4	5	6	9

Tablo 2

Bağımsız Değişken	2	4	5	6	9	$g(x) = ax+b$
Bağımlı Değişken	-2	0	1	2	5	

Tablo 1 deki boşlukları doldurunuz. Tablo 2 deki boşluklar tablo 1 deki boşluklar ile aynıdır. Doldurduğunuz tablolara göre grafikleri çizip $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları arasındaki ilişkiyi belirtiniz.



$f(x)$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ ile gösterilir.

TERS FONKSİYON :

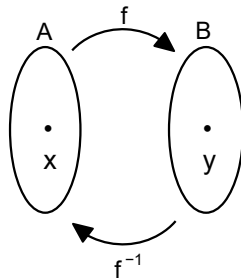
Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için bu fonksiyonun bire bir (1-1) ve örten olması gerekir.

$f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri $y=x$ doğrusuna göre simetriktir.

$f : A \rightarrow B$ tanımlı iken

$f^{-1} : B \rightarrow A$

$y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ dir.



TERSİNİ BULMA KURALI (GENELLEME)

Bir fonksiyonun tersini;

Adım 1 $y=f(x)$ ifadesinde x yerine y , y yerine x yazarız

Adım 2 Denklemi y için çözeriz

Bu adımlar yer değiştirebilir

Örnek...2 :

$f(x) = 3x + 7$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

I. Yol
 $y = 3x + 7$
 $x = 3y + 7$
 $y = \frac{x-7}{3}$
 $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$

II. Yol
 Gözüm adımlarını yer değiştirebiliriz yani önce x 'i yalnız bırakır sonra $x \leftrightarrow y$ değişikliği yapabiliriz

$$y = 3x + 7$$

$$\frac{y-7}{3} = x$$

$$\frac{x-7}{3} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$$

Örnek...3 :

Uygun şartlarda $f(x) = \frac{2x+3}{4x+5}$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

$$y = \frac{2x+3}{4x+5}$$

$$x = \frac{2y+3}{4y+5}$$

$$4xy + 5x = 2y + 3$$

$$4xy - 2y = -5x + 3$$

$$y(4x-2) = -5x+3 \rightarrow y = \frac{-5x+3}{4x-2}$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+5}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-5x+3}{4x-2}$$

PRATİK KURALLAR :

1) $f(x) = ax+b$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ dir.

2) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ dir.

Örnek...4 :

Aşağıdaki fonksiyonların tersini uygun şartlarda bulunuz.

$$f(x) = 2x+5$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$f(x) = 5x-137$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+137}{5}$$

bunu istersek $\frac{5x-137}{5x+1}$ yazılabilir

$$f(x) = 9x = 9x+0$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{9}$$

$$f(x) = \frac{3x+7}{2x+5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x+7}{2x-3}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{3x-5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x-2}{3x-1}$$

$$f(x) = \frac{7-4x}{2x-8} = \frac{-4x+7}{2x-8}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{8x+7}{2x+4}$$

$$f(x) = \frac{4x-1}{5x} = \frac{4x-1}{5x+0}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5x-4}$$

$$f(x) = \frac{5}{2x-3} = \frac{0x+5}{2x-3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2x}$$

Örnek...5 :

$f: \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x) = \frac{ax + \sqrt{3}}{3x - b}$

bire-bir ve örten ise tersi vardır.

ifadesi bire bir (1-1) ve örten bir fonksiyon ise a+b toplamı kaçtır?

$x=6$ için $f(x)$ [TK ve tersinin tanım kümesinde (TK)]
 $x=2$ için $f^{-1}(x)$ tanım kümesidir. (paydalar 0 dir)

$x=6 \Rightarrow 3 \cdot 6 - b = 0 \Rightarrow b = 18$

$f^{-1}(x) = \frac{bx + \sqrt{3}}{3x - a} \Rightarrow x=2 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6$

$a + b = 6 + 18 = 24$

Örnek...6 :

Uygun koşullarda $x = \frac{3f(x) + 5}{f(x) + 2}$ fonksiyonu

veriliyor. Buna göre,

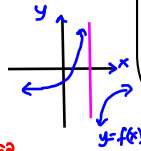
- a) Fonksiyonun ve tersinin cebirsel ifadelerini bulunuz.
- b) $f(x)$ fonksiyonunun nitel özelliklerini belirtiniz.
- c) $f(0) + f^{-1}(0)$ toplamı kaçtır?

Ters alınırken x yerine birtakimden sonra x ve y değiştirilerek $f^{-1}(x)$ e geçiyorduk

a) $x = \frac{3y + 5}{y + 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x + 5}{x + 2}$ olsun!

İçeriler çukur da yapılabilir, $f(x)$ bulunur $\Rightarrow f(x) = \frac{-2x + 5}{x - 3}$ (kısık yal ik)

b) TK = $\mathbb{R} - \{3\}$ GK = $\mathbb{R} - \{-2\}$
 TK \rightarrow GK için örten, TK \rightarrow TK için örten.
 Sifırı $x = 5/2$, Dy ekvini $y = -5/3$ de keser
 maksimum / minimum yoktur / bire-birdir.
 $y = 1/x$ den $y = -1/x - 2$ elde edilerek (A) 3 br aşğı
 (A2) Orde kottano (A3) 2 br aşğı ötkene



Örnek...7 :

Uygun koşullarda $f(x) = \frac{f(x) - x}{x + 4}$ fonksiyonu

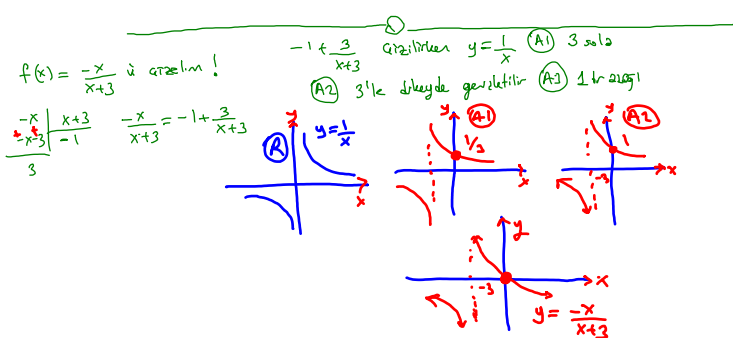
veriliyor. Buna göre, $f(x)$ fonksiyonunu, tanım ve görüntü kümesini bulunuz

$y = \frac{y-x}{x+4} \Rightarrow xy + 4y = y - x \Rightarrow xy + x = -3y \Rightarrow x(y+1) = -3y$

$x = \frac{-3y}{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x+3}$

$f: \mathbb{R} - \{-3\} \Rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

x yerine f^{-1}(x) e geçti yapılabiliriz



Örnek...8 :

Bir taksidedeki taksimetre çalıştırıldığında önceden belirlenmiş bir açılış ücretine ek olarak kilometre başına belli bir ücreti hesaplayarak yolcunun ödeyeceği ücreti belirler. Bir ticari takside taksimetre açılış ücreti 100 ₺ lira, kilometre başına ücret 40₺ lira olarak belirlenmiştir

Bir taksinin taksimetresi açıldığı andan itibaren aldığı mesafeye (km) göre yolcunun ödeyeceği ücreti (₺) ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

b) Yolcunun ödeyeceği ücrete (₺) göre taksimetrenin açıldığı andan itibaren aldığı mesafeyi (km) ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

c) Taksiden inen bir kişinin 900 TL ile 1100 TL arasında ücret ödediği bilindiğine göre gittiği mesafe kaç kilometre olabileceğini bulunuz.

Açılış 100 kunda 40 ₺ (x gidilen yol)

a) $k(x) = 100 + 40x$ $ü = k(x) = 100 + 40x$ ($x > 0$)

b) istenen ters fonksiyondur.

$ü = 100 + 40x$

$x = \frac{ü - 100}{40}$ $x = f(ü) = \frac{ü - 100}{40}$ ($ü > 100$)

c) $900 < 100 + 40x < 1100$
 $800 < 40x < 1000$
 $20 < x < 25$

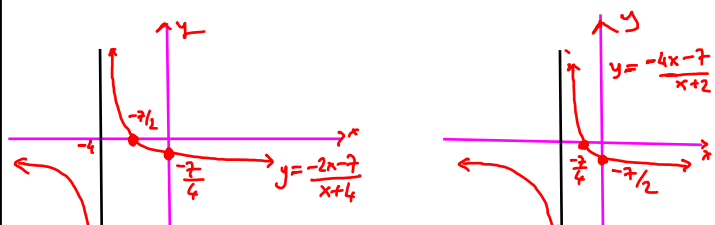
Örnek...9 :

$f: A \rightarrow B, f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$ fonksiyonunun tersinin

cebirsel temsilini ve ters fonksiyonunun olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz. Fonksiyon ve tersinin grafiğini çiziniz.

$f(x) = \frac{1 - 2x - 8}{x + 4} = \frac{-2x - 7}{x + 4}$ $f^{-1}(x) = \frac{-4x - 7}{x + 2}$

$f: A \rightarrow B \Rightarrow A = \mathbb{R} - \{-4\}$ $B = \mathbb{R} - \{-2\}$



$f(x)$ çiztikten $y = 1/x$ grafiği
 A1 4 sola ötkendir
 A2 2 br aşğı ötkendir.
 Çizim yapılırken $y = \frac{-4x-7}{x+2}$ için ters fonksiyon elde edilme adımlarında $y = \frac{1}{x+2} - 2$
 $y + 2 = \frac{1}{x+2}$ $x + 4 = \frac{1}{y+2}$ $x = \frac{1}{y+2} - 4$
 ve $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+2} - 4$ ü çiziyoruz
 bunun için $y = 1/x$ 2 sola 4 aşağı ötkenmelidir.

Örnek...10 :

Uygun tanım kümelerinde verilen fonksiyonların terslerinin kurallarını bulunuz.

Fonksiyon	Tanım kümesi	Görüntü Kümesi	Tersinin Cebirsel ifadesi
$f(x) = \frac{4}{x-3}$	$\mathbb{R} - \{3\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x-1} + 3$	$\mathbb{R} - \{1\}$	$\mathbb{R} - \{3\}$	$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x-3}$
$f(x) = \frac{-2}{x+3} + 1$	$\mathbb{R} - \{-3\}$	$\mathbb{R} - \{1\}$	$f^{-1}(x) = \frac{-3x+1}{x-1}$

Örnek...11 :

Tabloyu doldurunuz

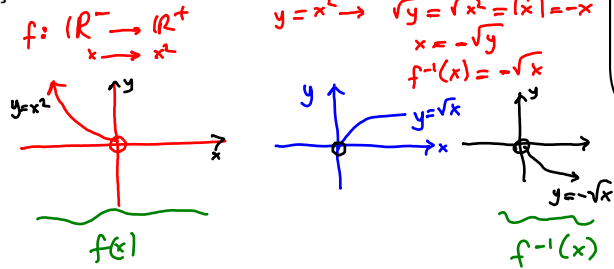
	Bağımsız Değişken	Bağımlı Değişken	Bağımsız Değişken	Bağımlı Değişken
$f(x) = x^2$	-1	1	1	-1
	0	0	0	0
	1	1	1	1

Karesel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişki bir fonksiyon belirtir mi?

Belirtmez, ters bağımlı 1 ile hem -1 hem +1 ile eleştiriyor dolayısıyla fonksiyon olmaz

Örnek...12 :

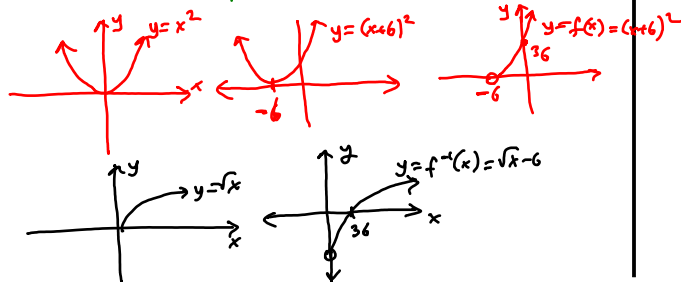
Negatif reel sayılardan pozitif reel sayılara tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tersini bulunuz ve her iki fonksiyonun grafiğini çiziniz.



Örnek...13 :

$f: (-6, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ $f(x) = x^2 + 12x + 36$ fonksiyonunun tersini bulunuz ve her iki fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$y = x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x+6| \Rightarrow \sqrt{y} = x+6$
 $\Rightarrow x = \sqrt{y} - 6 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 6$ $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (-6, \infty)$

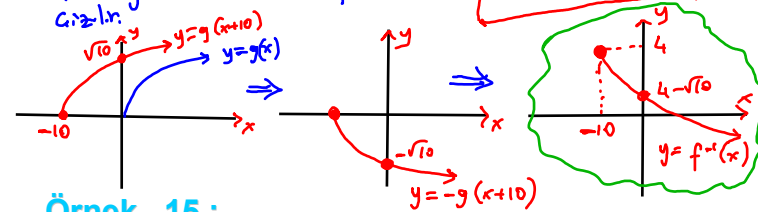


Örnek...14 :

$f: (-\infty, 4) \rightarrow (-10, \infty)$ $f(x) = x^2 - 8x + 6$ fonksiyonunun tersini bulunuz ve her iki fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$y = x^2 - 8x + 6 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 6$
 $y = (x-4)^2 - 10$
 $y + 10 = (x-4)^2$
 $\sqrt{y+10} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4|$
 $\sqrt{y+10} = -x+4$
 $x = 4 - \sqrt{y+10}$
 $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{x+10}$

$g(x) = \sqrt{x}$ referans fonksiyonu alınırsa $f^{-1}(x) = -1 \cdot g(x+10) + 4$ olacaktır $g(x)$ 10br sola $0x$ de kaydırılır ve -1 br yukarı ötelenerek $f^{-1}(x)$ çizilir.



Örnek...15 :

Uygun tanım kümelerinde verilen fonksiyonların terslerinin kurallarını bulunuz.

Fonksiyon	Tanım kümesi	Görüntü Kümesi	Tersi
$f(x) = x^2$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x^2$	$(-\infty, 0]$	$[0, \infty)$	$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
$f(x) = (x+1)^2$	$[-1, \infty)$ \neq $(-\infty, 1]$	$[0, \infty)$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ $\neq -\sqrt{x-1}$
$f(x) = x^2 + 4$	$[0, \infty)$ \neq $(-\infty, 0]$	$[4, \infty)$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$ $\neq -\sqrt{x-4}$
$f(x) = x^2 - 4$	$[0, \infty)$ \neq $(-\infty, 0]$	$[-4, \infty)$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ $\neq -\sqrt{x+4}$
$f(x) = x^2 + 4x + 4$	$(-\infty, -2]$ \neq $[-2, \infty)$	$[0, \infty)$	$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}-2$ $\neq \sqrt{x}-2$
$f(x) = x^2 + 6x + 10$	$(-\infty, -3]$ \neq $[-3, \infty)$	$[1, \infty)$	$f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}-3$ $\neq \sqrt{x-1}-3$
$f(x) = 2(x-3)^2 + 1$	$[3, \infty)$ \neq $(-\infty, 3]$	$[1, \infty)$	$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2}} + 3$ $\neq -\sqrt{\frac{x-1}{2}} + 3$

Yukarıdaki örneklerde 1-1 olduğu için tanımlarından hangisini seçersek ona göre mutlak değeri denemeliyiz. Bu sebeple seçilen tanım kümesi değerinca başka bir ters olmaz

örneğin $f(x) = x^2 + 6x + 10$ için Tanım kümesi $(-\infty, -3]$ alınırsa $y = (x+3)^2 + 1$
 $\sqrt{y-1} = \sqrt{(x+3)^2} \Rightarrow \sqrt{y-1} = |x+3|$
 $\sqrt{y-1} = -x-3 \Rightarrow x = -\sqrt{y-1}-3$
 $\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}-3$ olur.
 tanım kümesi: $[-3, \infty)$ alınırsa $\sqrt{y-1} = |x+3|$
 $\sqrt{y-1} = x+3 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}-3$
 ve $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}-3$ olacaktır.

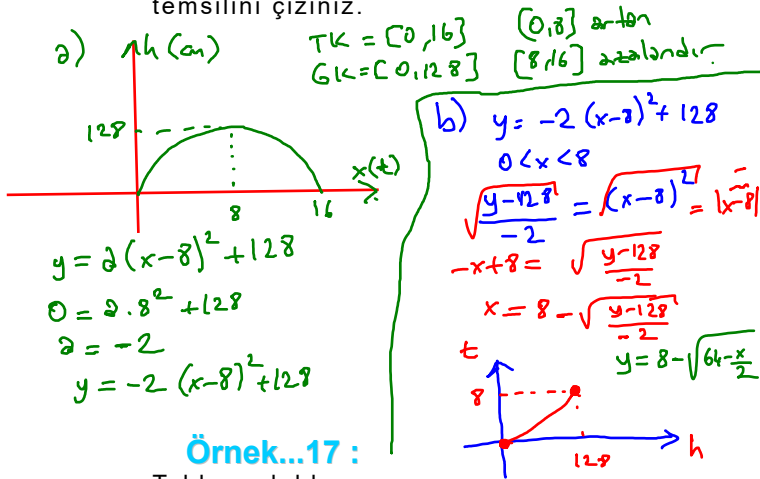
Örnek...16 :

Bir öğrenci Garo adlı gezegende başlangıçta yerde hareketsiz duran bir topa vurulmasıyla harekete geçen topun yükseklik zaman ilişkisinin karesel bir fonksiyon ile modellenebileceğini gözlemlemiştir. Top 16 saniye sonra saniyede yere tekrar çarpmış ve yerden en çok 128 cm yükselmiştir.

Buna göre

a) 0-8 (saniyeler) zaman aralığında topun yüksekliğinin değişimini gösteren fonksiyonun grafik temsilini çizerek tanım ve görüntü kümesini bulunuz, fonksiyonun artan-azalan olma durumunu inceleyiniz.

b) Topun yükselmesi esnasında geçen zamanın topun yüksekliğine bağlı değişiminin cebirsel temsilini yazınız. Topun yüksekliğinin ilk defa 128 cm olana kadar geçen zamanın değişimini gösteren grafik temsilini çizin.

**Örnek...17 :**

Tabloyu doldurunuz

	Bağımsız Değişken	Bağımlı Değişken	Bağımlı Değişken	Bağımlı Değişken
$f(x) = \sqrt{x}$	0	0	0	0
	1	1	1	1
	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
	3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3

Karesel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişki bir fonksiyon belirtir mi?

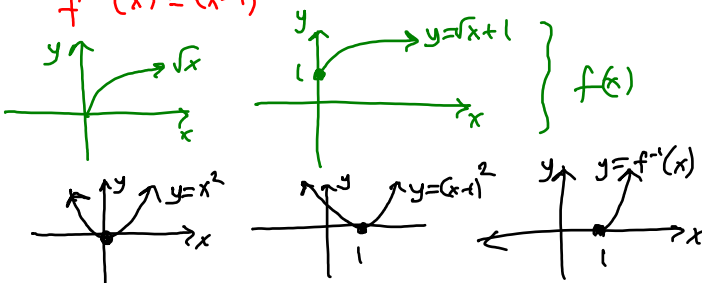
Belirtir $f(x) = \sqrt{x}$ ise $f^{-1}(x) = x^2$
 $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

Örnek...18 :

$f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ $f(x) = \sqrt{x} + 1$ fonksiyonunun tersini bulunuz ve her iki fonksiyonun grafiğini çizin.

$$y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow (y-1)^2 = x$$

$$f^{-1}(x) = (x-1)^2$$

**Örnek...19 :**

$f: A \rightarrow B, f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz.

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ olsun } g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ 1-1 olsun}$$

$$g(x-2) + 3 = f(x) \text{ olacaktır}$$

$$f: [2, \infty) \rightarrow [3, \infty) \text{ (1-1 ve onto olsun)}$$

$$A = [2, \infty)$$

$$B = [3, \infty)$$

Örnek...20 :

Uygun tanım kümelerinde verilen fonksiyonların terslerinin kurallarını bulunuz.

Fonksiyon Cebirsel Temsili	Tanım kümesi	Görüntü Kümesi	Tersinin Cebirsel Temsili
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$f^{-1}(x) = x^2$
$f(x) = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$	$[1, \infty)$	$f^{-1}(x) = (x-1)^2$
$f(x) = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$	$[0, \infty)$	$f^{-1}(x) = x^2 - 1$
$f(x) = \sqrt{x+2} - 3$	$[-2, \infty)$	$[-3, \infty)$	$f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2$
$f(x) = 4\sqrt{x-3} - 1$	$[3, \infty)$	$[-1, \infty)$	$f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + 3$