

RASYONEL FONKSİYONLAR

Rasyonel fonksiyonlar; ekonomi, fizik gibi bilim dalları ve mühendislik hesaplamaları gibi pek çok farklı alanda kullanılır.

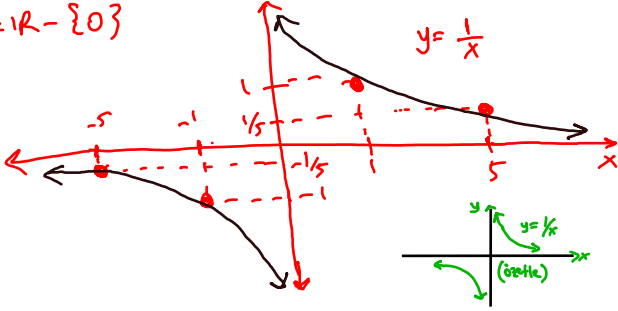
$f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu rasyonel referans fonksiyonu olarak adlandırılır.

Örnek...1 :

$f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini noktaları işaretleyerek tanım kümesinde grafiğini çiziniz.

x	-10	-5	-1	1	5	10
y	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	-1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

T.K = $\mathbb{R}-\{0\}$



Grafik ve cebirsel ifadeden yararlanarak nitel özelliklerini belirtiniz.

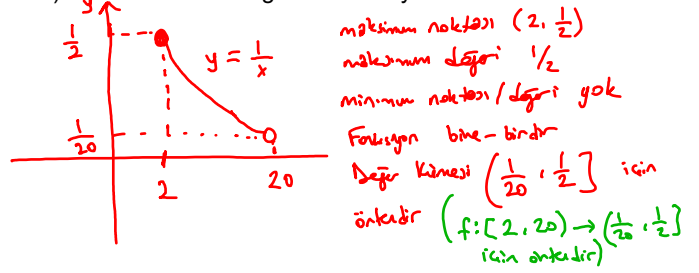
a) Tanım kümesi	$\mathbb{R}-\{0\}$								
b) Görüntü kümesi	$\mathbb{R}-\{0\}$								
c) Fonksiyonun sıfırı	$f(x)=0$ olmaz, sıfır yoktur								
d) Fonksiyonun işareti	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{x}$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$\frac{1}{x}$	-	0	+
x	$-\infty$	0	$+\infty$						
$\frac{1}{x}$	-	0	+						
e) Artan olduğu aralık	Yoktur.								
f) Azalan olduğu aralık	$(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında azalır.								
g) Örtelik	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}-\{0\}$ için örteliktir. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için örteliktir.								
h) Bire-birlik	$\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan bire-bir olur.								
i) Tekliği-Çiftliği	$f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$) $f(x)$ tekliktir.								

Örnek...2 :

$f: [2, 20] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ veriliyor

Buna göre f fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve seçenekleri açıklayınız.

- Görüntü kümesini bulunuz.
- En büyük ve en küçük değeri var ise bulunuz.
- Bire birliğini inceleyiniz.
- Örteliğini inceleyiniz.
- Artan-azalanlığını inceleyiniz.



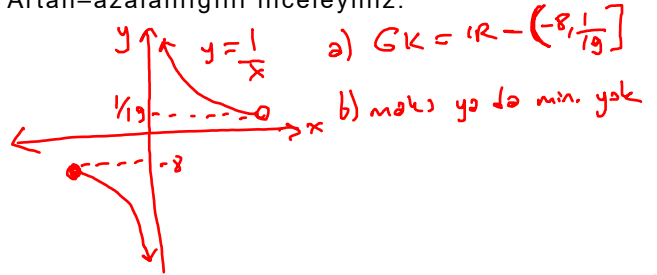
$\forall x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan $f(x)$ azalandır
($x_1, x_2 \in [2, 20]$)

Örnek...3 :

$f: [-\frac{1}{8}, 19]-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ veriliyor

Buna göre f fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve seçenekleri açıklayınız.

- Görüntü kümesini bulunuz.
- En büyük ve en küçük değeri var ise bulunuz.
- Bire birliğini inceleyiniz.
- Örteliğini inceleyiniz.
- Artan-azalanlığını inceleyiniz.



c) $\forall x_1, x_2 \in [-\frac{1}{8}, 19]-\{0\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 $f(x)$ bire-bir dir.

d) $f: [-\frac{1}{8}, \frac{1}{19}]-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}-(-\frac{1}{8}, \frac{1}{19})$ için artandır.
Bu kümeden daha geniş bir değer kümesi seçilirse işareti olur

e) $(-\frac{1}{8}, 0)$ ve $(0, 19)$ aralıklarında azalır.

RASYONEL REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLAR

$g(x)=a.f(x+r)+k$ biçimindeki fonksiyonları $f(x)=\frac{1}{x}$ referans fonksiyonundan çıkarırken

Adım 1 $y=f(x)$ r birim sola ($r<0$ için |r| birim sağa) ötelenir(kaydırılır).

Adım 2 bir önceki adımda elde edilen fonksiyona a çarpanına göre daraltma genişletme uygulanır.

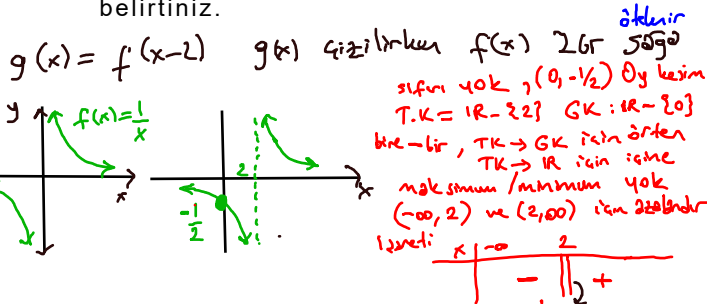
Adım 3 bir önceki adımda elde edilen fonksiyon k birim yukarı ($k<0$ için aşağı) ötelenir (kaydırılır).

Burada uygulanacak dönüşümler sırasıyla r,a,k harfleri sırlamasıyla uygulanır.

Örnek...4 :

$g(x)=\frac{1}{x-2}$ fonksiyonunu rasyonel referans

fonksiyonu olan $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu türünden ifade ediniz. Grafiğini çizip, nitel özelliklerini belirtiniz.



Örnek...5 :

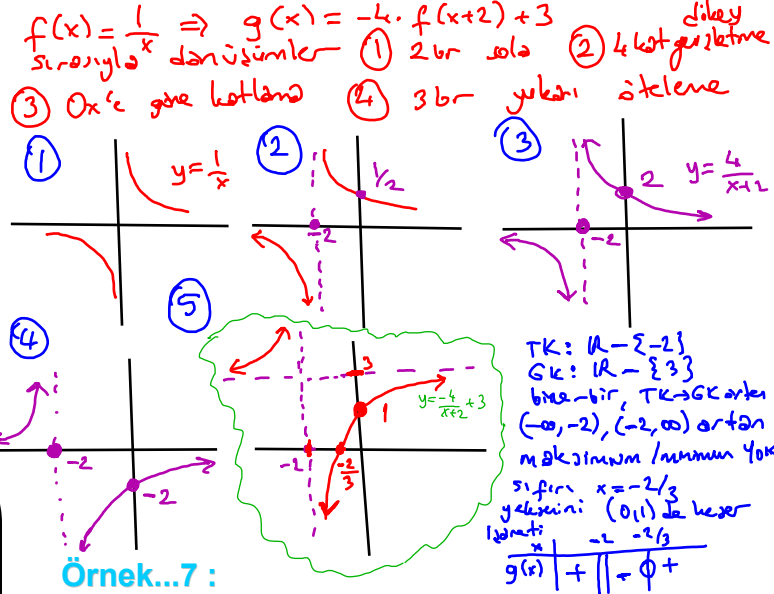
Tabloyu doldurunuz

	$r(x)=\frac{1}{x}-4$	$g(x)=\frac{1}{x+1}$	$p(x)=\frac{5}{x-2}+3$
f(x) türünden ifadesi	$r(x)=f(x)-4$	$g(x)=f(x+1)$	$p(x)=5f(x-2)+3$
Yapılacak öteleme/dönüşüm	Oy eksenine paralel 4br aşağı ötelene	Ox eksenine paralel 1 br sola ötelene	2 sağa ötelene 5 kat dilimleyicisine 3br yukarı ötelene
Grafik			

Örnek...6 :

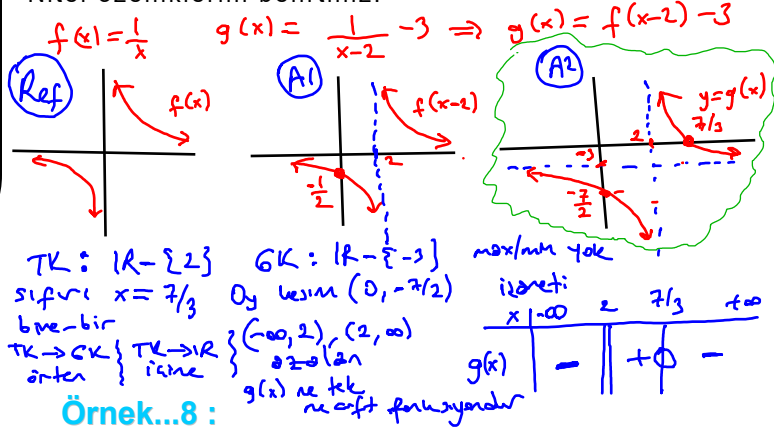
$g(x)=\frac{-4}{x+2}+3$ fonksiyonunu rasyonel referans

fonksiyonu olan $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu türünden ifade ediniz. Grafiğini çizip, nitel özelliklerini belirtiniz.



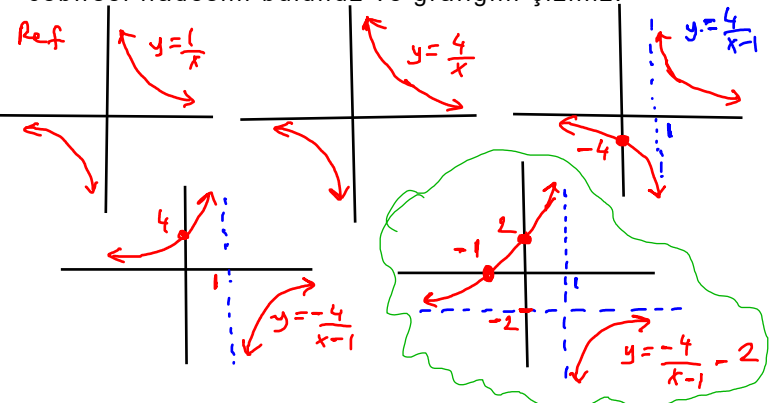
Örnek...7 :

Rasyonel referans fonksiyonunun y eksenini boyunca negatif yönde 3 birim, x eksenini boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle elde edilecek fonksiyonun cebirsel ifadesini bulunuz. Bu fonksiyonun grafiğini çiziniz. Nitel özelliklerini belirtiniz.



Örnek...8 :

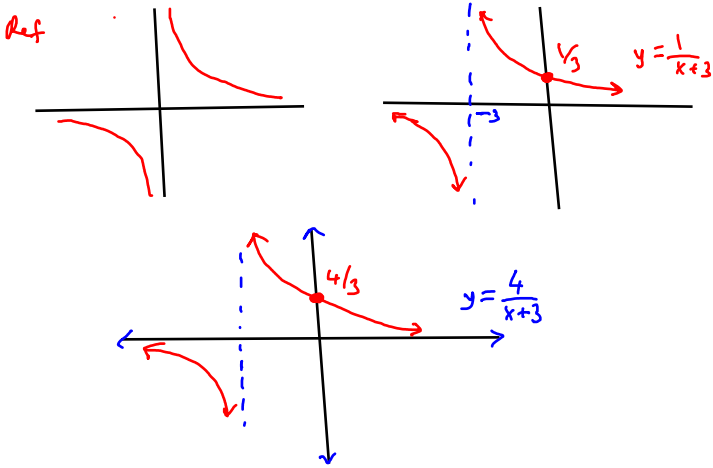
$g(x)$ fonksiyonu elde edilirken rasyonel referans fonksiyonunun üzerindeki y değerlerini önce 4 katı ile eşleyip ardından x eksenine göre yansıma dönüşümü uygulanmıştır. Sonra x eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim, y eksenini boyunca negatif yönde 2 birim öteleme uygulanmıştır. Buna göre, fonksiyonun cebirsel ifadesini bulunuz ve grafiğini çiziniz.



Örnek...9 :

$g(x)$ fonksiyonu elde edilirken, rasyonel referans fonksiyonunun cebirsel temsilinde tüm bağımsız değişkenlerine 3 eklenmiş ve elde edilen bağımlı değişkenin 4 katı alınmıştır. Buna göre, $g(x)$ fonksiyonun cebirsel ifadesini bulunuz. Bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$$g(x) = \left(\frac{1}{x+3}\right) \cdot 4 \quad g(x) = \frac{4}{x+3}$$

**Örnek...10 :**

Bir işin birim zamanda yapılma hızına güç denir ve P (watt) ile gösterilir. Yapılan iş W (joule), işin yapılması için geçen süre t (sn.) olmak üzere güç $W = Pt$

şeklinde ifade edilmektedir.

Yapılan 1000 joule işin yapılma süresi t ve gücün t 'ye bağlı fonksiyonu $P(t)$ olmak üzere

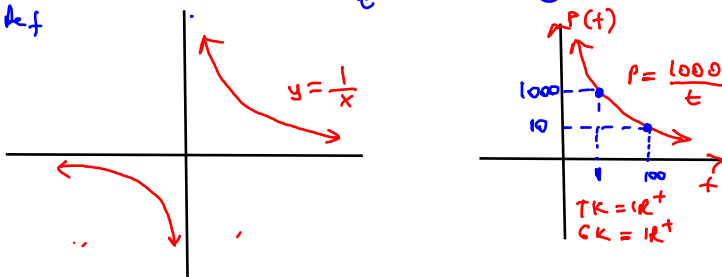
a) P fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) Fonksiyonun artan-azalanlığını inceleyiniz.

c) Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

ç) $1 \leq t \leq 100$ aralığında gücün en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

$$W = P \cdot t \Rightarrow P = \frac{W}{t} \quad P = \frac{1000}{t} \quad (t > 0)$$

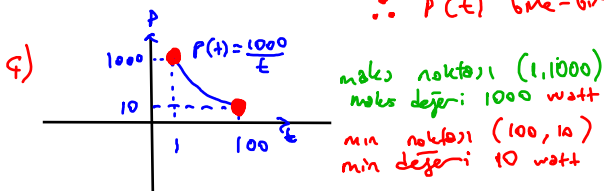


b) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ \quad t_1 < t_2 \Rightarrow P(t_1) > P(t_2)$
olduğundan tannun kumesi olan $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$ kumesinde $P(t)$ azalandır.

c) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ \quad P(t_1) = P(t_2) \Rightarrow \frac{1000}{t_1} = \frac{1000}{t_2}$

$$\Rightarrow t_1 = t_2$$

$\therefore P(t)$ bire-birdir.



maks noktası $(1, 1000)$
maks değeri: 1000 watt
min noktası $(100, 10)$
min değeri: 10 watt

Örnek...11 :

Fareler üzerinde deney yapan bir araştırmacı, bir ilacı kullandıktan sonra kandaki ilaç miktarı çeşitli zaman aralıkları için ölçmüştür. Elde ettiği değerlere bakarak ilacın kandaki yüzdelik konsantrasyon değerlerin çoğu zaman **rasyonel bir fonksiyonla** modellenebileceğini

düşünmüştür. Bu ilişkiyi $C(t) = \frac{a}{b+t} - c$ biçiminde matematiksel olarak modellemiştir.

- $C(t)$: kandaki ilaç konsantrasyonunun yüzdesi (örneğin % mg/L),
- t : ilacın verilmesinden sonraki süre (saat),
- a, b, c : deneysel olarak belirlenen pozitif sabitlerdir.

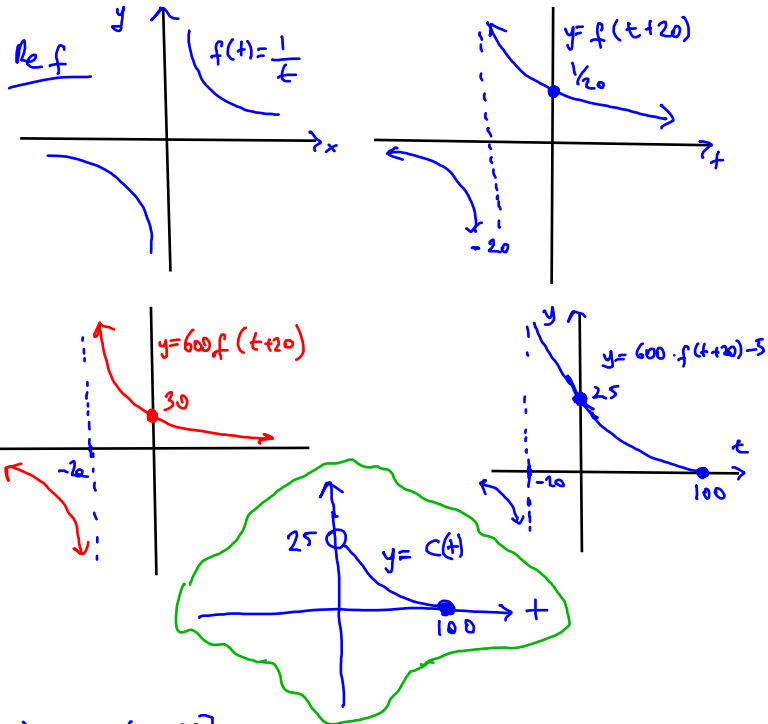
Deney sabitleri $a=600$, $b=20$ ve $c=5$ alındığında

a) Modelin grafiğini çiziniz.

b) Bu fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.

$$C(t) = \frac{600}{20+t} - 5$$

$f(t) = \frac{1}{t}$ alınırsa $C(t) = 600 \cdot f(t+20) - 5$
20 br solda, 600 ile dikeyde genişletme son olarak 5 br aşağı yanda öteleme



b) TK: $(0, 100)$
GK: $[0, 25)$
fonksiyon 1-1, garanti kumesi $[0, 25)$ için artan, \mathbb{R}^+ için azalır.
tann kumesinde azalan fonksiyondur.
sıfırı $x=100$, min değeri: 0, min noktası $(100, 0)$
maks değeri (noktası) yoktur. ne tek, ne çifttir.
izdret:

t	$-\infty$	0	100
$C(t)$	tannsız	+	0 tannız